Premier problème

1. Par les théorèmes usuels, f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et un calcul direct donne le résultat demandé.
2. Par croissance comparée, g tend vers 0 en 0, et donc on obtient un prolongement par continuité en posant $g(0)=0$. D'autre part, on a
$$\frac{g(t)-g(0}{t-0}=\frac{\exp(-1/t)}{t^2}\xrightarrow{t\to 0}0.$$
Ce prolongement est donc dérivable en 0, avec $g'(0)=0$.
3. On a $g'(t)=\frac{\exp(-1/t)}{t^3}(1-t)$. De plus, g tend vers 0 en l'infini (toujours la croissance comparée). D'où le tableau

t	0		1		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$\exp(-1)$	$\searrow$	0

4. (a) On a $H(x)=\int_1^x t\exp(-t)dt$. On calcule cette intégrale en réalisant une intégration par parties, posant $u'(t)=e^{-t}$ et $v(t)=t$. On obtient donc
$$H(x)=-e^{-x}(x+1)+2e^{-1}.$$
(b) On pose $x=1+h$, et donc on a :
$$H(x)=-e^{-1}e^{-h}(2+h)+2e^{-1}=-e^{-1}(1-h+h^2/2-h^3/6+o(h^3))(2+h)+2e^{-1}.$$
Après simplifications, on trouve :
$$H(x)=e^{-1}(x-1)-\frac{e^{-1}}{6}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$
5. (a) L'équation (E_n) est équivalente à $g(t)=1/n$. Or,
   – g est continue sur $]0,1[$;
   – g est strictement croissante sur $]0,1[$ car sa dérivée y est strictement positive ;
   Ainsi, g établit une bijection de $]0,1[$ sur $]0,e^{-1}[$. Comme $n\geq 3$, on a $n>e$ et donc $1/n\in]0,e^{-1}[$. Ainsi, (E_n) admet une unique solution $\alpha_n\in]0,1[$.
   (b) On a $g(\alpha_{n+1})=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=g(\alpha_n)$. Puisque g est croissante sur $]0,1[$, on en déduit $\alpha_{n+1}\leq\alpha_n$, la suite (α_n) est donc décroissante. De même on montre que (β_n) est croissante.
   (c) Supposons par l'absurde que $\alpha_n\to l>0$. Alors l'égalité $g(\alpha_n)=1/n$ entraine par passage à la limite (légitime car g est continue) que $g(l)=0$, ce qui est impossible puisque $g>0$ sur $]0,+\infty[$. C'est donc impossible. Un raisonnement analogue s'applique à (β_n).
   La suite (α_n) est donc décroissante, minorée par 0 : elle converge, et sa limite ne peut pas être strictement positive, donc (α_n) converge vers 0. De même, (β_n), qui est croissante, ne peut pas être majorée sinon elle serait convergente. Elle tend donc vers $+\infty$.

6. C'est le cas si et seulement si $f'(t) = g(t)$ donc par la question 1 si et seulement si $t = 1$.
7. La pente cherchée vaut $p(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = t$, elle tend vers 0 si t tend vers 0 et vers $+\infty$ si t tend vers $+\infty$.
8. On calcule
$$x'(t) = f''(t) = \frac{\exp(-1/t)}{t^4}(1 - 2t).$$
L'étude de $y = g$ est déjà conne par la question 3. On obtient donc le tableau :

t	0		1/2	1		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	$4\exp(-2)$		$\searrow$	0
y	0		$\nearrow$	$\exp(-1)$	$\searrow$	0

9. Voir le fichier sur le site.
10. On remarque que :
   - f est continue sur $]0, +\infty[$. D'autre part, $f(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$. Ainsi, f prolongée est continue sur $[0, +\infty[$;
   - f est C^1 sur $]0, +\infty[$;
   - $f'(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0^+.

   Par le cours, on en déduit que f est C^1 sur $[0, +\infty[$ et que de plus $f'(0) = 0$. Puisque $g(0) = 0$, la relation de la question 1 est encore vérifiée pour $t = 0$.
11. (a) Ces intégrales sont définies comme intégrales de fonctions continues sur $[0, x]$. La relation demandée s'obtient en effectuant une intégration par parties, en posant $u(t) = f(t)$, $u'(t) = f'(t)$ et $v(t) = t$, $v'(t) = 1$.

   (b) Puisque g est positive et $x \geq 0$, on a $G(x) \geq 0$. L'autre inégalité s'obtient en utilisant la relation de Chasles, et le fait que $g(t) \leq 1/t$ pour tout $t > 0$:
$$G(x) = \int_0^1 g(t)dt + \int_1^x g(t)dt \leq C + \int_1^x \frac{dt}{t} \leq C + \ln(x),$$
   où $C = \int_0^1 g(t)dt$.

   (c) Par les questions précédentes, $0 \leq G(x)/x \leq C/x + \ln(x)/x$ si $x \geq 1$. En particulier, le théorème d'encadrement des limites nous dit que $G(x)/x \to 0$ quand $x \to +\infty$.
   Par la question 11.a), on a :
$$\frac{F(x)}{x} = \exp(-1/x) + \frac{G(x)}{x} \to 1.$$
   Ainsi, $F(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$.
12. On résoud d'abord l'équation homogène $x^2y' + y = 0$. La solution générale est $y(x) = C\exp(1/x)$.
   Pour résoudre l'équation générale, on utilise la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \lambda(x)\exp(1/x)$. y est solution de (E) si et seulement si
$$\lambda'(x) = \exp(-1/x) = f(x),$$
   donc $\lambda = F$ convient. La solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est donc donnée par
$$y(x) = \exp(1/x)(C + F(x)),\ C \in \mathbb{R}.$$

13. Remplaçant x par 0 dans (E), on trouve $u_0 = 0$.
14. En dérivant (E), on obtient une nouvelle équation
$$x^2y'' + (2x+1)y' = 2x.$$
Pour $x = 0$, on obtient $u_1 = 0$. De même, en dérivant une seconde fois, on obtient l'équation
$$x^2y^{(3)} + (4x+1)y'' + 2y' = 2$$
qui donne $u_2 = 2$.
15. Si une telle fonction existe, les question 13 et 14 assurent qu'en réalité, $y(x) = x^2$. On vérifie facilement que ceci n'est pas une solution de (E), et donc (E) n'admet pas de solution polynomiale de degré 2.
16. (a) Remarquons d'abord qu'il est licite de dériver n fois l'équation (E), car les solutions de (E) sont en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dérivons donc n fois l'équation avec $n \geq 3$. On obtient :
$$(x^2y'(x))^{(n)} + y^{(n)}(x) = (x^2)^{(n)} = 0 \text{ car } n \geq 3.$$
D'autre part, la formule de Leibniz appliqué au premier terme donne
$$(x^2y'(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)}(y'(x))^{(n-k)}.$$
Les termes de la somme sont en fait nuls pour $k \geq 3$ car alors $(x^2)^{(k)} = 0$. Il ne reste qu'à calculer les 3 premiers termes qui donnent exactement l'équation demandée.
Faisant $x = 0$, on obtient alors $u_n = -n(n-1)u_{n-1}$.
(b) On cherche à trouver une expression pour la suite u_n en calculant ses premiers termes. On démontre alors par récurrence sur n que $u_n = (-1)^n n((n-1)!)^2$, ce qui se fait aisément en utilisant la réponse à la question précédente.
Puisque y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet des développements limités à tout ordre en 0 qu'on peut calculer par la formule de Taylor-Young. On obtient :
$$y(x) =^s um_{k=0}^n \frac{u_k}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k(k-1)!x^k + o(x^n).$$

Deuxième problème

1. On vérifie facilement que $a(t) + b(t) + c(t) = 0$ pour tout t dans $\mathbb{R}$, et donc $N(t) \in P$.
2. Soit $M(x, y, z)$. On a
$$M \in D \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ x+y+z &=& 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& 2 \end{array}\right. \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\lambda \\ y &=& 3 \\ z &=& \lambda \end{array}\right.$$
Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) \neq 3$: $N(t)$ n'appartient jamais à D.

3. Il est très facile de vérifier que $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)=1$. Ainsi, $N(t)$ appartient à la *sphère* (on est dans l'espace!) de centre O et de rayon 1. Ainsi, $N(t)$ est située à l'intersection d'une sphère et d'un plan, c'est-à-dire sur un cercle de P. En remarquant que le centre O de la sphère est aussi sur P, il en résulte que le cercle de P cherché a pour centre O et pour rayon 1.
4. La question 2. nous montre que $A(0,3,0)$ est un point de D et que $\vec{v}=(-1,0,1)$ en est un vecteur directeur. D'après le cours, on obtient :

$$d(N(t),d)=\frac{\|\overrightarrow{AN(t)}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}=3-\sin(t).$$

D'autre part, comme on connait une équation cartésienne de Q, on en déduit que

$$d(N(t),Q)=\frac{|a(t)+b(t)+c(t)-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3-\sin(t)}{\sqrt{3}}.$$

5. Notons $j=\exp(2i\pi/3)$, qui vérifie $1+j+j^2=0$. On a

$$e^{it}+e^{i(t+2\pi/3)}+e^{i(t-2\pi/3)}=e^{it}(1+j+j^2)=0.$$

6. Notons $\Omega=(a,b,c)$ l'isobarycentre concerné. On sait que

$$a=\frac{1}{3}(a(t)+a(t+2\pi/3)+a(t-2\pi/3))=\frac{1}{3}\Re(e^{it}+e^{i(t+2\pi/3)}+e^{i(t-2\pi/3)})=0.$$

De même, $c=0$, et $b=0$ car $b=\frac{1}{3}\Im(e^{it}+e^{i(t+2\pi/3)}+e^{i(t-2\pi/3)})$. Finalement, on obtient $\Omega=O$.
7. Evidemment, $s(t)=\sin(t)$.
8. On a

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{-1}{2}\cos^2(t)\sin(t)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)\\ &= -\frac{1}{16i}(e^{3it}-e^{-3it}+e^{it}-e^{-it})\\ &= -\frac{1}{8}(\sin(3t)+\sin(t)). \end{aligned}$$

9. D'abord, un calcul direct donne $d(t)=\frac{-\cos^2(t)}{2}$. D'autre part, on peut aussi remarquer que

$$\sin(t)^2=(s(t))^2=(a(t)+b(t)+c(t))^2=a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)+2d(t)=1+2d(t)$$

ce qui redonne bien sûr le même résultat!
10. (a) Dans ce cas, $a(\pi/2)=c(\pi/2)=0$. 0 est donc racine double de R. C'est en particulier une racine de R'.

(b) Par le cours, ou en développant, on obtient :

$$R(X) = X^3 - s(t)X^2 + d(t)X - p(t).$$

Les questions précédentes donnent donc :

$$R(X) = X^3 - \sin(t)X^2 - \frac{\cos^2(t)}{2}X + \frac{1}{8}(\sin(3t) + \sin(t)).$$

11. Il y a plusieurs choses à démontrer. D'abord, il faut vérifier que P est un sous-espace vectoriel de E, puisqu'il est de dimension 2. On peut le faire presque d'un coup. En effet, soit $\vec{u} = (x, y, z)$. Alors

$$\vec{u} \in P \iff z = -x \iff \vec{u} = x(\vec{i} - \vec{k}) + y(\vec{j}) \iff \vec{u} = \mathrm{vect}(\vec{i} - \vec{k}, \vec{j}).$$

Donc P est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{j}$. Comme ses deux vecteurs sont clairement non colinéaires, P est bien de dimension 2.

12. Q n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0, 0, 0)$ n'est pas élément de Q. Q est un plan affine.

13. Il faut d'abord vérifier que $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ sont éléments de P, ce qui a été fait à la question 11. D'autre part, on vérifie aisément que $\vec{i'}.\vec{j'} = 0$, et que ces deux vecteurs sont de norme 1. Ainsi, ils forment une base orthonormale de P. Pour obtenir une base orthonormale de l'espace, il suffit de faire leur produit vectoriel. On obtient le vecteur $\vec{k'}$, qui est par conséquent également un vecteur normal à P.

14. Notons $\vec{e} = x\vec{i'} + y\vec{j'} + z\vec{k'}$. Si on effectue le produit scalaire par $\vec{i'}$, on obtient

$$\vec{e}.\vec{i'} = x$$

ce qui est le résultat demandé. De même pour les autres coordonnées.

15. (a) Soit $\vec{e} = x\vec{i'} + y\vec{j'} + z\vec{k'}$. En utilisant le fait que u est linéaire et que $\vec{i'}, \vec{j'}$ sont dans le noyau de u, on obtient :

$$u(\vec{e}) = zu(\vec{k'}).$$

Puisque $z = \vec{e}.\vec{k'}$, on obtient bien le résultat en posant $\vec{z} = \vec{k'}$.

(b) On vérifie aisément que u est linéaire, en utilisant la linéarité du produit scalaire. Puisque u envoie E dans E, c'est bien un endomorphisme. De plus, si $\vec{e} \in P$, alors $\vec{e}.\vec{k'} = 0$ et donc $u(\vec{e}) = 0$. Ainsi, $P \subset \ker u$.

(c) Si $\vec{z} \neq 0$, alors

$$u(\vec{e}) = 0 \iff \vec{e}.(\vec{k'}) = 0 \iff \vec{e} \in P$$

et donc $\ker u = P$. Réciproquement, si $\ker(u) = P$, alors $u(\vec{k'}) \neq 0$ et comme $u(\vec{k'}) = \vec{z}$, on a $\vec{z} \neq 0$.

u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le théorème du rang donne $3 = \dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = 2 + \mathrm{rg}(u)$. Ainsi, u est de rang 1, et son image est exactement $\mathrm{vect}(\vec{z})$.

16. Puisque $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ sont éléments de P, on a $p(\vec{i'}) = \vec{i'}$ et $p(\vec{j'}) = \vec{j'}$. Puisque $\vec{k'}$ est orthogonal à P, on a $p(\vec{k'}) = 0$, ce qui achève la justification.

17. Le cours donne
$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$
(remarquez le mauvais énoncé qui utilise le même symbole P pour deux choses très différentes !). On calcule son inverse par exemple par la méthode du pivot de Gauss, et on trouve :
$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & 1 & 0\\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}.$$

18. (a) p étant un projecteur, on a $p\circ p=p$, ce qui se traduit matriciellement par $M^2=M$.

    (b) On peut faire ceci par récurrence (c'est très simple), ou en utilisant la formule du binôme de Newton, ce qui est possible ici car $IM=MI$. Utilisant que $M^k=M$ pour tout $k\geq 1$, on obtient immédiatement le résultat.

    (c) Par le cours, $M=PM'P^{-1}$. On obtient alors :
$$M=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

19. (a) Remarquons que $\mathcal{M}=\mathrm{vect}(M,I)$. Comme les matrices M,I ne sont pas colinéaires, on obtient que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel de dimension 2, dont une base est donnée par M et I.

    (b) On a $M_{a,b}=P(aM'+bI)P^{-1}$. Il vient :
$$\det(M_{a,b})=\det(P)\det(aM'+bI)\det(P)^{-1}=\det(aM'+bI)=(a+b)^2b.$$
    Ainsi, $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a\neq -b$ et $b\neq 0$.

    (c) Sachant que $M^2=M$, on obtient $e=ac+ad+bc$ et $f=bd$.

    (d) Il faut trouver a et b tels que $e=0$ et $f=1$. Ceci est vérifié si
$$c=\frac{-a}{b(a+b)}\text{ et }d=\frac{1}{b}.$$