Mines d'Albi,Alès,Douai,Nantes 2002 - Epreuve spécifique - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : matrices semblables, changement de base, endomorphisme, suites, intégrales impropres.

Commentaires : Le premier problème est un problème assez classique d'algèbre linéaire, où on passe beaucoup des matrices aux applications linéaires et réciproquement. Le second problème est un prélude à ce qui est traité en deuxième année.

Problème 1

1. $\sim$ est :
- réflexive : $A = I^{-1}AI$.
- symétrique : $A = P^{-1}BP \iff PAP^{-1} = B \iff B = Q^{-1}AQ$, avec $Q = P^{-1}$.
- transitive : si $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, alors $A = (QP)^{-1}C(QP)$, et $PQ \in GL_3(\mathbb{R})$ (ce dernier ensemble est un groupe).

2. On rappelle que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Donc, si A est semblable à B, $A = P^{-1}BP$, on a :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P)\det(B)\det(P^{-1})\\ &= \det(B).\end{aligned}$$

Deux matrices qui ont des déterminants distincts ne sont pas semblables (on dit que le déterminant est un invariant de similitude).

3.a. Soit $y \in Im(w)$. Il existe x dans $\ker u^{i+j}$ tel que $y = u^j(x)$. Mais alors, $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$, et donc $Im(w) \subset \ker u^i$.

3.b. D'après le théorème du rang,

$$\dim(Im(w)) + \dim(\ker w) = dim(\ker u^{i+j}).$$

Puisque $\dim(Im(w)) \leq \dim(\ker u^i)$ et $\dim(\ker w) \leq \dim(\ker u^j)$ (il est facile de constater que $\ker w \subset \ker u^j$), on a le résultat.

4.a. On applique 3.b. pour $i = 2$, $j = 1$:

$$3 = \dim(\ker u^3) \leq \dim(\ker u) + \dim(\ker u^2).$$

Par le théorème du rang, $\dim(\ker u) = 1$, et $\dim(\ker u^2) \geq 2$. On applique ensuite 3.b. pour $i = j = 1$:

$$\dim(\ker u^2) \leq \dim(\ker u) + \dim(\ker u) = 2.$$

4.b. D'après la question précédente, $u^2 \neq 0$, et il existe a de E tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrons que la famille $(a,u(a),u^2(a))$ est libre : si on avait une égalité du type

$$\lambda_0 a + \lambda_1 u(a) + \lambda_2 u^2(a) = 0,$$

on compose d'abord par u^2 :

$$\lambda_0 u^2(a) = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$

Puis on compose par u :

$$\lambda_1 u^2(a) = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

On obtient aussi finalement $\lambda_2 = 0$. Puisque E est de dimension 3, la famille $(a,u(a),u^2(a))$ est a fortiori une base.

4.c. On a :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.a. Puisque $u \neq 0$ (son rang n'est pas nul), il existe b de E tel que $u(b) \neq 0$.

5.b. Puisque $\ker u$ est de dimension 2, il existe c vecteur de $\ker u$ non colinéaire à $u(b)$ et donc $(u(b),c)$ est une famille libre de $\ker u$. Il suffit ensuite de prouver que $(b,u(b),c)$ est libre : si on a une égalité du type

$$\lambda_0 b + \lambda_1 u(b) + \lambda_2 c = 0,$$

on compose par u pour obtenir

$$\lambda_0 u(b) = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$

Puisque $(u(b),c)$ est libre, on en déduit ensuite que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. $(b,u(b),c)$ est bien une base de E.

5.c. On a :

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. A est inversible car son déterminant est le même que celui de la matrice T (cf question 2.), et vaut donc 1.

7. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ N^3 = 0.$$

On a alors : $P^{-1}A^{-1}P = T^{-1} = (I_3 + N)^{-1}$. Or,

$$(I_3 - N + N^2)(I_3 + N) = (I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3.$$

Ceci prouve que

$$(I_3 + N)^{-1} = I_3 - N + N^2,$$

ce qui à son tour donne le résultat demandé.

8. A et A^{-1} sont alors toutes les deux semblables à I_3. Comme être semblable est une relation d'équivalence, elles sont semblables.

9.a. Soit u l'endomorphisme associé à N dans la base canonique. D'après la question 4., il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut car deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables (cf le théorème sur les effets d'un changement de base sur un endomorphisme). Une matrice semblable à M est alors :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.b. En utilisant la formule du binôme de Newton (les matrices N et N^2 commutent), on vérifie aisément que $M^3 = 0$. En outre, le rang de M est aussi le rang de V et vaut donc 2.

9.c. Puisque le rang de M est 2, et $M^3 = 0$, le même raisonnement que celui effectué pour N prouve que M est semblable à U. Comme on a déjà prouvé que N est semblable à U, M et N sont semblables.

9.d. Soit Q tel que $Q^{-1}MQ = N$. On a :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= I_3 + N \\ &= I_3 + Q^{-1}MQ \\ &= Q^{-1}(I_3 + M)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}A^{-1}PQ. \end{aligned}$$

A et A^{-1} sont semblables.

10. Inspirés par la question 9., on vérifie que $M = N^2 - N$ est de rang 1, et vérifie $M^2 = 0$. On prouve alors que M et N sont toutes semblables à la matrice U', et donc semblables l'une à l'autre. On conclut comme à la question 9.d.

11.a. Bien sûr, le noyau d'un endomorphisme de E est un sous-vectoriel de E. On a :

$$\begin{aligned} xa + yb + zc \in \ker(u - id_E) &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y - z &=& 0 \\ y + z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff y + z = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& -y \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\ker(u - id_E)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2, dont une base est donnée par (e_1,e_2) avec $e_1 = a$ et $e_2 = b - c$.

11.b. (e_1,e_2,c) est une base de E, car on peut vérifier aisément que c'est une famille libre (on peut aussi calculer le déterminant de cette famille dans la base (a,b,c) et vérifier qu'il est non nul - il fait 1). On a :

$$u(e_1) = e_1,\ u(e_2) = e_2,\ u(c) = -b + 2c = -e_2 + c.$$

Dans la nouvelle base, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.c. La matrice A est une matrice semblable à une matrice du type T : elle est donc semblable à son inverse.

12. Non! On peut par exemple choisir $A = -I_3$. On a alors $A^{-1} = A = I_3$, et $A \sim A^{-1}$. Pourtant, A n'est pas semblable à une matrice de type T car elles n'ont pas le même déterminant.

Problème 2

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$. On a donc, pour tout $x \in [k,k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}.$$

Il suffit d'intégrer cette inégalité entre k et $k+1$ pour obtenir le résultat.

2. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$, et on utilise la relation de Chasles pour simplifier la somme d'intégrales.

3. Si $p \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{dx}{x^p} &= \left[\frac{1}{-p+1}\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^X \\ &= \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{X^{p-1}}\right).\end{aligned}$$

Cette quantité admet une limite ($=\frac{1}{p-1}$) si $X \to +\infty$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.
Si $p=1$, on a cette fois :

$$\int_1^X \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^X = \ln X \xrightarrow{X\to+\infty} +\infty.$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est donc pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

4. Si $p=1$, la partie droite de l'inégalité obtenue en 2. prouve que $(S_n(1))$ tend vers $+\infty$ si $n \to +\infty$. Si $p=2$, on remarque que la suite $(S_n(p))_{n\geq 1}$ est une suite croissante, et la partie gauche de l'inégalité obtenue en 2. couplée avec le résultat précédent entraîne que cette suite est bornée. Donc elle converge.

5. Il faut être précis dans la rédaction. On a successivement :

- φ est C^1 sur $]0,\pi]$, et pour tout $t \in]0,\pi]$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\left(-1+\frac{t}{\pi}\right)2\sin(t/2) - \cos(t/2)(t^2/2\pi - t)}{4\sin^2(t/2)}.$$

- Si $t \neq 0$, on a :

$$\varphi(t) \sim_0 \frac{-t}{t} = -1.$$

  On en déduit que φ est continue en 0, et $\varphi(0) = -1$.
- On effectue un développement limité pour étudier le comportement de φ' au voisinage de 0 :

$$\left(-1+\frac{t}{\pi}\right)2\sin(t/2) = \left(-1+\frac{t}{\pi}\right)(t+o(t^2)) = -t + \frac{t^2}{\pi} + o(t^2).$$

$$\cos(t/2)(t^2/2\pi - t) = (1 - t^2/4 + o(t^2))(t^2/2\pi - t) = -t + t^2/2\pi.$$

  On en déduit

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)}$$

  On en déduit que $\varphi'(t)$ tend vers $\frac{1}{2\pi}$ si t tend vers 0. De cela, on tire à la fois que φ' est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$, et que φ' est continue en 0.

En conclusion, φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

6. Il faut intégrer par parties (deux fois)!

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)dt &= -\int_0^{\pi}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin(kt)dt+\left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^{\pi}\\ &= -\int_0^{\pi}\frac{1}{k^2}\times\frac{1}{\pi}\cos(kt)dt+\left[\frac{1}{k^2}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos kt\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

7. C'est très classique! On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= \sum_{k=1}^{n}\Re\left(e^{ikt}\right)=\Re\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}\right)\\ &= \Re\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{it})^k\right)\\ &= \Re\left(\frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right)\\ &= \Re\left(\frac{e^{i\frac{n+2}{2}t}\left(e^{-i\frac{n}{2}t}-e^{i\frac{n}{2}t}\right)}{e^{it/2}\left(e^{-it/2}-e^{it/2}\right)}\right)\\ &= \Re\left(e^{i\frac{n+1}{2}t}\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}.\end{aligned}$$

Il faut ensuite se souvenir des formules de trigonométrie, et notamment de :

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right).$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{2}.$$

8. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left((n+1/2)t\right)dt &= \left[-\frac{\psi(t)\cos((n+1/2)t)}{n+1/2}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n+1/2}\int_0^{\pi}\psi'(t)\cos((n+1/2)t)dt\\ &= \frac{\psi(0)}{n+1/2}+\frac{1}{n+1/2}\int_0^{\pi}\psi'(t)\cos((n+1/2)t)dt\end{aligned}$$

Puisque ψ est de classe C^1, il est possible de trouver une constante M telle que $|\psi(t)|\leq M$ et $|\psi'(t)|\leq M$ si $t\in[0,\pi]$. On a alors d'une part :

$$\left|\frac{\psi(0)}{n+1/2}\right|\leq\frac{M}{n+1/2}$$

et d'autre part :

$$\left|\frac{1}{n+1/2}\int_0^{\pi}\psi'(t)\cos((n+1/2)t)dt\right|\leq\frac{\pi M}{n+1/2}.$$

Ceci prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\psi(t)\sin\left((n+1/2)t\right)dt=0.$$

9. Il faut résumer nos connaissances! Bien sûr, il faut approcher $\zeta(2)$ par la suite $(S_n(2))$. Mais par la question 6. :

$$\begin{aligned} S_n(2) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^n \cos(kt)dt. \end{aligned}$$

On introduit maintenant 7.

$$S_n(2) = \int_0^\pi \varphi(t)\sin\big((n+1/2)t\big) - \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt.$$

Il suffit ensuite de faire tendre n vers $+\infty$, et d'appliquer 8 et 5. On a alors :

$$\zeta(2) = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

10.a. Par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} x^n(1-x)^n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n+k} \\ &= \sum_{i=n}^{2n} (-1)^{i-n} C_n^{i-n} x^i. \end{aligned}$$

10.b. Si $k < n$ ou $k > 2n$, la forme précédente entraîne que $f_n^{(k)}(0) = 0$. Si $n \leq k \leq 2n$, on a :

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \times k! e_k,$$

qui est un entier (car $n!$ divise $k!$). Puisque $f_n^{(k)}(1-x) = (-1)^k f_n^{(k)}(x)$, on en déduit que $f_n^{(k)}(1)$ est entier.

11.a. Pour $k \leq n$, $b^n \pi^{2k}$ est un entier, et on déduit du résultat de la question précédente que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont entiers.

11.b. On a :

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= F_n''(x)\sin(\pi x) + \pi F_n'(x)\cos(\pi x) - \pi F_n'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x)\sin(\pi x) \\ &= b^n\left(\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1} f_n^{(2n)}(x)\right)\sin(\pi x) \\ &\quad + b^n\left(\pi^{2n+2} f_n(x) - \pi^{2n} f_n''(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\right)\sin(\pi x) \\ &= b^n \pi^{2n+2} f_n(x) \\ &= \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x). \end{aligned}$$

On a alors :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^1 g_n'(x)dx = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$

12.a. On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}\to 0.$$
En particulier, il existe n_0 tel que $n\geq n_0 \implies \frac{a}{n+1}\leq\frac{1}{2}$. D'où, si $n>n_0$:
$$u_n=\frac{u_n}{u_{n-1}}\times\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\times\cdots\times\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\times u_{n_0}.$$
On obtient alors :
$$|u_n|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}.$$
On a donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

12.b. Il s'agit d'une conséquence immédiate du résultat précédent.

12.c. Si $x\in[0,1]$, on a aussi $(1-x)\in[0,1]$ et $|x^n|\leq 1$, $|(1-x)^n|\leq 1$.

12.d. Remarquons que la fonction $x\mapsto \pi a^n f_n(x)\sin(\pi x)$ est une fonction continue strictement positive sur $]0,1[$. On a donc $A_n>0$. D'autre part, si $n\geq n_0$, on a :
$$\begin{aligned}A_n &\leq \pi\int_0^1\frac{a^n}{n!}\sin(\pi x)dx\\ &\leq \pi\frac{a^n}{n!}\frac{2}{\pi}<1\end{aligned}$$
En particulier, $A_n\in]0,1[$. Mais, on a prouvé à la question 11.b. que A_n devrait être entier. C'est donc que l'hypothèse de départ est fausse, et π^2 est irrationnel.

12.e. Si π était rationnel, $\pi=c/d$, l'élévation au carré prouverait que π^2 serait rationnel. π est donc irrationnel.

Pour information : Contrairement à ce qu'a écrit l'auteur du problème, on connait désormais quelques informations sur l'irrationalité des $\zeta(p)$, pour les entiers impairs $p\geq 5$. En particulier, un jeune mathématicien français, Rivoal, a prouvé en 2001 qu'il existait une infinité de valeurs de p pour lesquelles $\zeta(p)$ est irrationnel.