Mines d'Albi,Alès,Douai,Nantes 2002 - Toutes filières - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : étude de fonctions, développements limités, suites récurrentes, équations différentielles, espace vectoriel euclidien, isométrie de l'espace, base orthormale, application affine

Commentaires : Il s'agit de deux problèmes assez faciles, du moins si l'on maitrise bien son cours. Le deuxième problème est intéressant, car il fait explorer des sujets parfois oubliés (comme la géométrie dans l'espace)

Problème d'analyse

1.1 Il est d'abord clair que f est continue (et même C^∞) sur $\mathbb{R}-\{0\}$. Au voisinage de 0, on sait que $\arctan t \sim_0 t$. Ceci entraîne que $\lim_{t\to 0, t\neq 0} f(t)=1$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}$. En outre,si $t\neq 0$,

$$f(-t)=\frac{\arctan(-t)}{-t}=\frac{-\arctan t}{-t}=f(t).$$

Ceci prouve que f est paire.

1.2 Il faut connaitre le développement limité d'$\arctan t$:

$$\arctan(t)=t+o(t^2).$$

On en déduit que :

$$\frac{\arctan t}{t}=1+o(t).$$

f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 : f est dérivable en 0, et $f'(0)=0$.

1.3 f est dérivable en 0, et clairement aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $t\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\frac{t}{1+t^2}-\arctan t}{t^2} \\ &= \frac{t-(\arctan t)(1+t^2)}{(1+t^2)t^2}. \end{aligned}$$

1.4 Il faut être un petit peu astucieux : on intègre $w\mapsto \frac{w}{(1+w^2)^2}$, dont une primitive est $w\mapsto\frac{-1/2}{1+w^2}$, et on dérive $w\mapsto w$. On en déduit que, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}dw &= \left[\frac{-w/2}{1+w^2}\right]_0^t+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{dw}{1+w^2} \\ &= \frac{-t/2}{1+t^2}+\frac{\arctan t}{2} \\ &= -\frac{1}{2}t^2 f'(t). \end{aligned}$$

Puisque $\frac{w^2}{(1+w^2)}$ est toujours positif, $\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}dw$ est du signe de t, et la relation précédente entraîne que f' est du signe de $-t$. On en déduit que f est croissante sur $]-\infty,0[$, et décroissante sur $]0,+\infty[$.

1.5 Pour ébaucher l'allure de la courbe, en plus des éléments précédents (parité, sens de variation), on pourra calculer la valeur en ± 1 (ie $\frac{\pi}{4}$), et calculer les limites en $\pm\infty$ (nulles).

2.1 Par le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction $g\ :\ x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que ϕ est continue, et même dérivable, sur $\mathbb{R}^*$. Au voisinage de 0, on a le développement limité suivant :

$$g(x) = 0 + f(0)x + o(x) = x + o(x).$$

On a donc, pour $x \neq 0$,

$$\phi(x) = 1 + o(1).$$

Appliquant le même raisonnement qu'à la question 1.1, on en déduit que ϕ est continue en 0. Finalement, si $x \in \mathbb{R}^*$, en effectuant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\phi(-x) &= \frac{1}{-x}\int_0^{-x} f(t)dt \\ &= \frac{1}{-x}\left(-\int_0^x f(-u)du\right) \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du \\ &= \phi(x).\end{aligned}$$

2.2 Si $x > 0$, puisque f est décroissante sur $[0,+\infty[$, on a, pour $t \in [0,x]$:

$$f(x) \leq f(t) \leq 1.$$

En intégrant cette inégalité (les bornes sont dans le bon sens), on obtient :

$$\int_0^x f(x)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x dt,$$

ou encore :

$$xf(x) \leq x\phi(x) \leq x.$$

Il suffit de diviser par $x > 0$ pour obtenir le résultat. Le cas $x < 0$ se déduit par parité, et le cas $x = 0$ est trivial. Pour ceux qui se demandent d'où vient ce raisonnement "divin", le dessin de la question 1.5 pourra aider, en interprétant l'intégrale comme une aire.

2.3 Nous avons déjà prouvé que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et la dérivée vaut :

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt \\ &= \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x)).\end{aligned}$$

Au voisinage de 0, remarquons qu'avec les notations utilisées en 2.1, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g' = f$ et $g'' = f'$. On en déduit que g admet un développement limité d'ordre 2 en 0, avec

$$\begin{aligned}g(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= x + o(x^2)\end{aligned}$$

ϕ admet donc un développement limité d'ordre 1 en 0, donné par

$$\phi(x) = 1 + o(x).$$

Ainsi, ϕ est dérivable en 0, et $\phi'(0)=0$.
D'autre part, puisque $f(x)-\phi(x)\leq 0$, $\phi'(x)$ est du signe de $-x$, et ϕ est décroissante sur $]0,+\infty[$, croissante sur $]-\infty,0[$.

2.4 Pour $t\geq 1$, on a :

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{\arctan t}{t} & \leq & \dfrac{\pi/2}{t}\\ \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan t}{t}dt & \leq & \displaystyle\int_1^x \frac{\pi/2}{t}dt=\frac{\pi\ln x}{2},\end{array}$$

ce qui implique

$$0\leq \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\arctan t}{t}dt\leq \frac{\pi \ln x}{2x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)dt=0.$$

Puisqu'il est clair que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1\frac{\arctan t}{t}dt=0$, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0.$$

2.5 Question laissée au lecteur.

3.1 L'inégalité de gauche est évidente. Posons, pour $t\geq 0$, $h(t)=\frac{t}{1+t^2}$. h est dérivable sur $[0,+\infty[$, avec

$$h'(t)=\frac{(1+t^2)-2t\times t}{(1+t^2)^2}=\frac{-t^2+1}{(1+t^2)}.$$

De sorte, h' est positive sur $[0{,}1]$ et négative sur $[1,+\infty[$. h admet donc, sur $[0,+\infty[$, un maximum en 1 qui vaut $1/2$. D'où le résultat.

3.2 D'après 2.2 et 2.3, si $x>0$,

$$\begin{array}{rcl}|\phi'(x)| & \leq & \dfrac{1}{|x|}|f(x)-\phi(x)|\\ & \leq & \dfrac{1}{x}(1-f(x))\end{array}$$

Or,

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{1}{x}(1-f(x)) & = & \dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{\arctan x}{x}\right)\\ & = & \dfrac{1}{x^2}\left(\displaystyle\int_0^x dt-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\right)\\ & = & \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt\\ & \leq & \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{t}{2}\\ & \leq & \dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{t^2}{4}\right]_0^x\\ & \leq & \dfrac{1}{4}.\end{array}$$

Puisque ϕ' est impaire (c'est la dérivée d'une fonction paire), l'inégalité reste vraie si $x<0$, et elle est aussi vraie si $x=0$ (cf question 2.3).

3.3 Posons $v(x)=\phi(x)-x$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la question précédente prouve que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $v'(x)\leq\frac{-3}{4}$. En outre, $\lim_{-\infty} v=+\infty$ et $\lim_{+\infty} v=-\infty$. v est donc une bijection (strictement décroissante) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique α de $\mathbb{R}$ tel que $v(\alpha)=0 \iff \phi(\alpha)=\alpha$. Puisque $v(0)=1$ et $v(1)=1-\phi(1)\leq 0$ (voir 2.3), on en déduit que $\alpha\in]0,1]$.

3.4 C'est classique! On a :

$$u_{n+1}-\alpha=\phi(u_n)-\phi(\alpha).$$

L'inégalité des accroissements finis associée à l'inégalité obtenue en 3.2 donne le résultat demandé. Par récurrence, il vient que

$$\begin{aligned}|u_n-\alpha| &\leq \frac{1}{4}|u_{n-1}-\alpha|\\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^2|u_{n-2}-\alpha|\\ &\leq \dots\\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n|u_0-\alpha|.\end{aligned}$$

On en déduit que (u_n) converge vers α.

4.1 Résolvons d'abord cette équation différentielle sur $]-\infty,0[$, où elle est équivalente à

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\arctan x}{x}.$$

On résoud d'abord l'équation sans second membre. Les solutions homogènes sont données par :

$$y_h(x)=C_1e^{-\int_0^x\frac{dt}{t}}=C_1e^{-\ln|x|}=\frac{C_1}{x}.$$

On résoud l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x)=\frac{C(x)}{x}$. L"équation différentielle est alors équivalente à

$$\frac{C'(x)}{x}=\frac{\arctan x}{x^2}.$$

On en déduit qu'une solution particulière est donnée par

$$y_p(x)=\phi(x),$$

et donc la solution générale sur $]-\infty,0[$ est :

$$y_1(x)=\phi(x)+\frac{C_1}{x}.$$

De même, les solutions sur $]0,+\infty[$ sont données par :

$$y_2(x)=\phi(x)+\frac{C_2}{x}.$$

4.2 Si y est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que y coïncide avec y_1 sur $]0,+\infty[$ et avec y_2 sur $]0,+\infty[$. Puisque y doit être continue en 0 (elle est même dérivable), il est nécessaire que les fonctions y_1 et y_2 admettent des limites finies en 0. Ceci n'est possible que si $C_1=C_2=0$: ϕ est la seule solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

Problème d'algèbre

1.1 Soit B la matrice $\frac{4}{3}A$, qui est la matrice relativement à $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $\varphi = \frac{4}{3}\psi$. Il est facile de vérifier que la matrice B est orthogonale, ou bien en calculant $B\,{}^tB$ et en montrant que l'on obtient I_3, ou bien en montrant que les vecteurs colonnes de B forment une base orthonormale de l'espace (on calcule alors les normes et les différents produits scalaires). Ainsi, φ est une isométrie de E. En outre, $\det B = 1$, ce qui prouve que φ est une rotation.

L'axe de cette rotation est donnée par l'ensemble des points invariants. Or,

$$Mat(\varphi - Id_E) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

On résoud alors le système produit par l'équation $\varphi(x,y,z) - Id_E(x,y,z) = (x,y,z)$. Les solutions de cette équation sont les vecteurs $(x,x,x) = x(e_1 + e_2 + e_3)$. L'axe de la rotation est donc la droite $\mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Il reste à prouver qu'il s'agit d'un demi-tour. Le vecteur $e_1 - e_2$ est orthogonal à l'axe de la rotation. En outre, $\varphi(e_1 - e_2) = -(e_1 - e_2)$. φ est donc bien un demi-tour.

1.2 On a

$$\psi = \frac{3}{4}\varphi = \left(\frac{3}{4}Id_E\right) \circ \varphi = \varphi \circ \left(\frac{3}{4}Id_E\right).$$

ψ est donc la composée du demi-tour précédent, et de l'homothétie vectorielle de rapport 3/4.

2.1 ψ est une bijection car c'est la composée de deux bijections. En outre, puisque $\frac{4}{3}\psi$ est une isométrie, pour tout x de E, on a :

$$\left\|\frac{4}{3}\psi(x)\right\| = \|x\|.$$

On en déduit que

$$\|\psi(x)\| \leq \frac{3}{4}\|x\|.$$

Ainsi, $\psi \in \mathcal{S} \cap GL(E)$.

2.2 Non, car $\|Id_E(x)\| = \|x\|$!

2.3 Si φ_1, $\varphi_2 \in \mathcal{S}$, les constantes associées étant respectivement k_1, k_2, alors

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \circ \varphi_2(x)\| &\leq k_1\|\varphi_2(x)\| \\ &\leq k_1k_2\|x\|, \end{aligned}$$

et on a bien $k_1k_2 \in [0,1[$. Pour autant, $\mathcal{S} \cap GL(E)$ n'est pas un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$, car cette partie ne contient pas l'élément neutre.

2.4 Si $x \in \ker(\varphi - Id_E)$, on a

$$\|\varphi(x)\| = \|x\| \text{ et } \|\varphi(x)\| \leq k\|x\|.$$

On a donc $\|x\| \leq k\|x\|$. Ceci n'est possible que si $x = 0$. Puisque $\varphi - Id_E$ est un endomorphisme de dimension finie, $\varphi - Id_E \in GL(E)$.

2.5 Le sens direct est évident. Pour la réciproque, si $x \in E$, $x \neq 0$, on pose $y = \frac{x}{\|x\|}$. On a

$$\|y\| = 1 \implies \|\varphi(y)\| \leq k.$$

Par linéarité, on obtient

$$\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|.$$

Cette égalité reste vraie si $x = 0$, et donc $\varphi \in \mathcal{S}$.

2.6 Soit (u_1,u_2,u_3) cette base orthonormée, et $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ les éléments diagonaux. On pose

$$k = \max(|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|) \in [0,1[.$$

Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$. Rappelons que l'on a

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1\varphi(u_1) + x_2\varphi(u_2) + x_3\varphi(u_3) \\ &= \lambda_1 x_1 u_1 + \lambda_2 x_2 u_2 + \lambda_3 x_3 u_3 \end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\|^2 &= |\lambda_1 x_1|^2 + |\lambda_2 x_2|^2 + |\lambda_3 x_3|^2 \\ &\leq k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\leq k^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

On obtient $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$, et $\varphi \in \mathcal{S}$.

3.1 On vérifie aisément que $\|e_1'\|^2 = \|e_2'\|^2 = \|e_3'\|^2 = 1$. D'autre part,

$$(e_1'|e_2') = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-1) = 0.$$

On montre de même que les autres produits scalaires sont nuls, ce qui achève de prouver que la base est orthonormale.

3.2 On a :

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\mu(e_1') = \frac{1}{2}e_1'$. De même, $\mu(e_2') = \frac{2}{3}e_2'$ et $\mu(e_3') = 0$. On en déduit que la matrice de μ dans $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat obtenu en 2.6 entraîne que $\mu \in \mathcal{S}$.

4.1 On a :

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha(x)\|^2 &= \alpha^2\big((x_1-x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_1-x_3)^2\big) \\ &= \alpha^2\big(1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2\big). \end{aligned}$$

4.2 Les formules de changement de base (avec les matrices de passage) permettent d'exprimer facilement x_1,x_2,x_3 en fonction de x_1',x_2' et x_3' :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \tfrac{1}{\sqrt{6}}x_3' \\ x_2 &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' - \tfrac{1}{\sqrt{6}}x_3' \\ x_3 &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \tfrac{2}{\sqrt{6}}x_3'. \end{aligned}\right.$$

On en tire :

$$x_1 - x_2 - x_3 = \frac{3}{\sqrt{3}}x_1'.$$

Ceci donne

$$\|\varphi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2(1+3{x'_1}^2).$$

Puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée, et que x est de norme 1, on a $|x'_1| \leq 1$. On en déduit que :

$$\|\varphi_\alpha(x)\| \leq 2|\alpha|.$$

On a égalité si, et seulement si, $x'_1 = \pm 1$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = \pm e'_1$.

4.3 D'abord, si $|\alpha| < 1/2$, la question précédente prouve clairement que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$. D'autre part, si $|\alpha| \geq 1/2$, pour $x = e'_1$, on a $\|\varphi_\alpha(x)\| \geq \|x\|$, ce qui empêche φ_α d'appartenir à $\mathcal{S}$.

5.1 Puisque f est une application affine, $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff \overrightarrow{f(O)M} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \\ &\iff \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OM} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \\ &\iff \overrightarrow{f(O)O} = (\varphi - Id_E)(\overrightarrow{OM}). \end{aligned}$$

5.2 D'après la question 2.4, $\varphi - Id_E$ est inversible. Il existe donc un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{f(O)O} = (\varphi - Id_E)(\overrightarrow{u})$. Il existe donc un unique point Ω invariant par f, donné par $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{u}$.

5.3 On a :

$$\overrightarrow{\Omega f(M)} = \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M}).$$

5.4.1 Comme dans le problème d'analyse, on prouve par récurrence sur n que :

$$\overrightarrow{\Omega M_n} = \varphi^n(\overrightarrow{\Omega M}).$$

On en déduit (toujours par récurrence) que

$$\|\overrightarrow{\Omega M_n}\| \leq k^n \|\overrightarrow{\Omega M_0}\|.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|\overrightarrow{\Omega M_n}\| = 0.$$

5.4.2 Soit f l'application affine définie par

- $f(0) = (1,1/2,1)$.
- La partie linéaire de f est $\varphi_{1/4}$ en utilisant les notations de la question 4.

On définit la suite de points (M_n) par $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$. Les coordonnées de M_n sont exactement les suites (x_n), (y_n) et (z_n) données par l'énoncé. D'après la question précédente, f possède un unique point fixe $\Omega = (a,b,c)$ et $\|\overrightarrow{\Omega M_n}\|$ tend vers 0. En particulier, les 3 suites (x_n), (y_n) et (z_n) convergent respectivement vers a,b et c. Reste à trouver les coordonnées de Ω qui sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1 \\ y &=& \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} \\ z &=& \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z + 1 \end{array} \right.$$

Par le pivot de Gauss, on trouve aisément que la seule solution du système est $(1,1,1)$: les suites (x_n), (y_n) et (z_n) convergent donc vers 1.