# CONCOURS COMMUN 2001
## DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

**Epreuve de Mathématiques**
**(toutes filières)**
**Jeudi 17 mai 2001 de 14h00 à 18h00**

**Instructions générales :**

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

## PROBLEME 1

*Les parties* **A** *et* **B** *sont indépendantes, mais sont utilisées par la partie* **C**.

**PARTIE A :**

Pour tout réel $a$ positif ou nul, on note $g_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_a(t) = t^a$.

**A.1.** Montrer que la fonction $g_a$ est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours $g_a$ la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction $g_a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $a \geqslant 1$.

Soient $a$ et $b$ deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t)\, g_b(1-t)\, dt\ .$$

**A.2.** Justifier l'existence de l'intégrale $I(a, b)$. Comparer $I(a, b)$ et $I(b, a)$.

*On écrira abusivement* $I(a, b) = \int_0^1 t^a (1-t)^b\, dt$.

**A.3.** Soient $a$ et $b$ deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a + 1, b)$ et $I(a, b + 1)$.

**A.4.** Calculer $I(a, 0)$. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)}\ .$$

**A.5.** Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels. Exprimer $I(p, q)$ à l'aide de factorielles.

**A.6.** En déduire la valeur de l'intégrale

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1} (\cos\theta)^{2q+1} d\theta\,,$$

où $p$ et $q$ sont deux entiers naturels.

**PARTIE B :**

Pour tout réel $a$ strictement positif, on note $f_a$ la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) .$$

**B.1.** Préciser l'ensemble de définition de $f_a$.

On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentant la restriction de la fonction $f_a$ à l'intervalle $]a, +\infty[$.

**B.2.** Si $a$ et $x$ dont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement

$$\frac{a}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-a) \leqslant \frac{a}{x-a} .$$

**B.3.** En déduire les variations de la fonction $f_a$ sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_a$.

**B.4.** Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sur un même schéma.

**B.5.** On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.
Etudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite $(y_n)$.

**Partie C :**

Pour tout réel positif ou nul $x$ et tout entier naturel non nul $n$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \, du .$$

**C.1.** Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} \, I(x, n)$.

**C.2.** En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que, pour tout $x$ fixé, la suite $\big(F_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

**C.3.** On fixe $x \geqslant 0$.

**a.** Montrer l'existence d'un réel strictement positif $U$ tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \qquad u \geqslant U \Longrightarrow e^{-u} \leqslant \frac{1}{u^{x+2}} .$$

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel non nul $n$, on a

$$F_n(x) \leqslant \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \frac{1}{U} .$$

**c.** Montrer que la suite $\big(F_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul $x$, on pose $F(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$.

**C.4.** Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad F(x+1) = (x+1)F(x).$$

En déduire la valeur de $F(k)$ pour $k$ entier naturel.

# PROBLEME 2

*Les parties* **B** *et* **C** *sont liées, mais la partie* **A** *est indépendante du reste du problème.*

On rappelle que, si $p$ est un entier naturel non nul, la notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre $p$ à coefficients réels.

**Partie A :**

Soit $p$ un entier naturel non nul. Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note $A$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. On note $I$ la matrice-unité d'ordre $p$.

Pour tout réel $t$, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\,.$$

**A.1.** Vérifier la relation

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t)\ .$$

**A.2.** En déduire que $\big(E(t)\big)^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

**A.3.** Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

**A.4.** Montrer que la famille $(I, A, A^2)$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

**A.5.** En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.

**A.6.** Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

**PARTIE B :**

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

**B.1.** Montrer que $F = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $F$, et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de $G$.

**B.2.** Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

**B.3.** En déduire qu'il existe une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter $P$, $D$ et $P^{-1}$.

**B.4.** Expliciter $D^n$ pour tout entier naturel $n$. Démontrer la relation $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. En déduire l'expression de $A^n$ sous forme de tableau matriciel.

**Partie C :**

On reprend les notations de la partie **B**.

**C.1.** En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel $t$, on a

$$e^t = \lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right)\ .$$

*On pourra admettre le résultat de cette question pour traiter les suivantes.*

**C.2.** Pour tout réel $t$, pour tout entier naturel $n$, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$. On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

**C.3.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim_{n \to +\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n \to +\infty} b_n(t)$, etc. Expliciter la matrice $E(t)$.

*Réponse partielle : on obtient* $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$.

**C.4.** Montrer qu'il existe deux matrices $Q$ et $R$ (carrées d'ordre deux) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad E(t) = e^{2t}\, Q + e^t\, R$$

et expliciter $Q$ et $R$.

**C.5.** Calculer les matrices $Q^2$, $R^2$, $QR$, $RQ$. Que peut-on dire des endomorphismes $q$ et $r$ de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices $Q$ et $R$ (*on pourra préciser la réponse en utilisant les droites* $F$ *et* $G$ *de la question* **B.1.**) ?

**C.6.** En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t)\ .$$

Que dire de $\big(E(t)\big)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ ?, de $\big(E(t)\big)^{-1}$ ?

L'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est-elle injective ?