Mines d'Albi,Alès,Douai,Nantes 2001 - Toutes filières - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : suites récurrentes, fonctions réciproques, polynômes, dérivabilité

Commentaires : Enfin un problème avec une partie qui réclame une vraie initiative personnelle! Il pourra aussi constituer une excellente révision des fonctions réciproques.

Problème 1

Partie I

1. Évident!

2.a. $E_1^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \exists b \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + b\}$. Une suite de $E_1^{(0)}$ est donc une suite arithmétique de raison b. En particulier, $u \in E_1^0$ si, et seulement si, il existe deux réels b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = nb + c$.

2.b. $E_0^0 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \exists b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = b\}$. Une suite de $E_0^{(0)}$ est donc stationnaire à partir de u_1. En particulier, $u \in E_0^{(0)}$ si et seulement si il existe deux réels b et c tels que $u_0 = c$ et $u_n = b$ pour $n \geq 1$.

3.
- $0 \in E_a^{(0)}$. Il suffit en effet de prendre $b_u = 0$.
- Soient $u,v \in E_a^{(0)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = a(u_n + \lambda v_n) + (b_u + \lambda b_v).$$

Si on pose $w = u + \lambda v$, alors $w \in E_a^{(0)}$ avec $b_w = b_u + \lambda b_v$.

4. Avant de commencer, remarquons que $x \in E_a^{(0)}$ avec $b_x = 1 - a$, et $y \in E_a^{(0)}$ avec $b_y = 0$. Montrons alors que (x,y) est une famille libre. Si $\lambda x + \mu y = 0$, on a en particulier le système suivant (obtenu en faisant $n = 0$ et $n = 1$) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ \lambda + a\mu & = & 0 \end{array} \right.$$

Le déterminant du système est $a - 1$ qui est non nul. Ce système admet donc une unique solution qui est $\lambda = \mu = 0$: la famille (x,y) est libre.

5.a. On peut ou résoudre le système explicitement, ou utiliser comme ci-dessus que son déterminant est non nul : le système est inversible.

5.b. Nous procédons par récurrence sur n, le résultat étant prouvé pour $n = 0$ ou $n = 1$. S'il est vrai au rang n :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & au_n + b \\ & = & a\lambda x_n + a\mu y_n + b \end{array}$$

Or, on sait que $u_1 = au_0 + b$, ce qui donne $\lambda + a\mu = \lambda a + \mu a + b$, et on obtient $b = \lambda - \lambda a$. Reportant cela dans l'équation précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \lambda a + \mu a^{n+1} + \lambda - \lambda a \\ &= \lambda + \mu a^{n+1} \\ &= \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}. \end{aligned}$$

5.c La famille (x,y) est génératrice de de $E_a^{(0)}$.

6. D'après les questions précédentes, une base de $E_a^{(0)}$ est $\{x,y\}$: une suite u est dans $E_a^{(0)}$ si, et seulement si, il existe deux constantes λ et μ telles que, pour tout n, $u_n = \lambda + \mu a^n$. En particulier, $E_a^{(0)}$ est de dimension 2.

Partie II

1. Considérons d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ \mathbb{R}_p[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{p+1} \\ P & \mapsto & \big(P(0),P(1),\dots,P(p)\big) \end{array}$$

φ est une application linéaire. Calculons son noyau : si $P \in \mathbb{R}_p[X]$ est tel que $P(0) = \dots = P(p) = 0$, alors P est un polynôme de degré au plus p qui admet $p+1$ racines. P est nécessairement le polynôme nul.

φ est donc injective. Supposons maintenant qu'il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_p[X]$ tels que, pour tout n,

$$u_{n+1} = au_n + P(n) = au_n + Q(n).$$

En évaluant pour $n = 0,\dots,p$, on trouve que $Q(0) = P(0),\dots,Q(p) = P(p)$, et donc $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Par injectivité de φ, $P = Q$, et le polynôme qui intervient dans la relation de récurrence est unique.

2. On remarque d'abord que $0 \in E_a^{(p)}$ en prenant par exemple $P_u = 0$. Ensuite, si $u,v \in E_a^{(p)}$, et si $w = u + \lambda v$, il est facile de vérifier que w est aussi élément de $E_a^{(p)}$, avec $P_w = P_u + \lambda P_v$.

3. Nous venons de voir que $P_{u+\lambda v} = P_u + \lambda P_v$, et ceci, couplé à l'unicité du polynôme P_u, prouve que $\theta(u + \lambda v) = \theta(u) + \lambda\theta(v)$.

4.

$$\begin{aligned} u \in Ker\theta &\iff P_u = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n \\ &\iff \exists u_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n u_0. \end{aligned}$$

On a donc $Ker\theta = vect\ y$, où y est toujours la suite définie par $y_n = a^n$.

5.a. Du fait que $a \neq 1$, il est clair que Q_k est degré k, le coefficient dominant étant $1 - a$.

5.b. C'est un résultat classique qu'une famille de polynômes de degrés tous différents est une famille libre. $(Q_0,\dots,Q_p)$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}_p[X]$. Comme elle comporte $p+1$ vecteurs, et que $\dim \mathbb{R}_p[X] = p + 1$, c'est en fait une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6.a. Soit $x^{(k)}$ la suite définie par $x_n^{(k)} = n^k$. Alors,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(k)} &= (n+1)^k \\ &= an^k + \big[(n+1)^k - an^k\big] \\ &= ax_n^{(k)} + Q_k(n). \end{aligned}$$

En particulier, $x^{(k)} \in E_a^{(p)}$, et $\theta(x^{(k)}) = Q_k$ est dans l'image de θ.

6.b. On a donc $vect(Q_0,\dots,Q_p) \subset \mathbb{R}_p[X]$, et donc $\mathbb{R}_p[X] \subset Im\theta \subset \mathbb{R}_p[X]$: θ est surjective.

7. On applique le théorème du rang :

$$rg\ \theta + \dim Ker\ \theta = \dim E_a^{(p)},$$

ce qui donne $p+2 = 1 + (p+1) = \dim E_a^{(p)}$.

8. Il suffit de prouver que $(x^{(0)},\dots,x^{(p)},y)$ est une famille libre de $E_a^{(p)}$. Si $\lambda_0 x^{(0)} + \dots + \lambda_p x^{(p)} + \mu y = 0$, on applique θ et on obtient :

$$\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_p Q_p = 0.$$

Mais $(Q_0,\dots,Q_p)$ est une famille libre, et donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_p = 0$. De ce fait, $\mu = 0$ aussi, et le résultat est prouvé.

9. (u_n) se décompose en $u_n = \lambda_0 + \lambda_1 n + \mu a^n$. En regardant les conditions initiales $n = 0,1,2$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_0 + \mu & = & -2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + 2\mu & = & 3 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\mu & = & 11 \end{array}\right.$$

La résolution de ce système donne $\lambda_0 = -5$, $\lambda_1 = 2$, et $\mu = 3$. On a donc :

$$u_n = -5 + 2n + 3 \times 2^n.$$

Partie III

1. Nous reprenons les notations de la partie II. Le polynôme P_u est toujours unique, et il est facile de vérifier que le noyau de θ est cette fois l'espace vectoriel des suites constantes. Posons cette fois, pour $k \geq 1$, $R_k(X) = (X+1)^k - X^k$. R_k est un polynôme de degré $k-1$, et $(R_1,\dots,R_{p+1})$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Comme en **II.6.a.**, R_k est dans l'image de θ, car $\theta(x^{(k)}) = R_k$. On a donc $\dim E_a^{(p)} = p+2$, une base en étant donnée par $\left(x^{(0)},\dots,x^{(p+1)}\right)$.

2. On a donc $u_n = \lambda_0 + \lambda_1 n + \lambda_2 n^2$. En appliquant aux rangs 0 à 2, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_0 & = & -2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 & = & -1 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & -6 \end{array}\right.$$

Après résolution du système, il vient :

$$u_n = -2 + 4n - 3n^2.$$

Problème 2

Partie I

1. Il est facile de calculer $\displaystyle\int_x^y e^t dt = e^y - e^x$. On a donc :

$$\int_x^y e^t dt = 1 \iff e^y - e^x = 1 \iff y = \ln\left(1 + e^x\right).$$

L'équation (E_x) possède donc une unique solution donnée par $f(x) = \ln\left(1+e^x\right)$.

2. f, comme composée de fonctions croissantes, est croissante. En outre, si x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$, et si $x \to -\infty$, $e^x \to 0$ et $f(x) \to 0$.

3. On calcule $f(x) - x$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\big(1 + e^x\big) - x \\ &= \ln\big(e^x(1 + e^{-x})\big) - x \\ &= \ln\big(1 + e^{-x}\big). \end{aligned}$$

Cettee dernière quantité tend vers 0 si x tend vers $+\infty$, et est toujours positive : la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe, et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

4. On a $1 + e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)$. Il faut faire attention ici car le développement limité du ln se fait en 2, et non en 1 comme d'habitude. On a :

$$\begin{aligned} \ln\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)\right) &= \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o\big(x^2\big)\right)\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o\big(x^2\big)\right) \\ &= \ln 2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o\big(x^2\big)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o\big(x^2\big)\right)^2 \\ &= \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o\big(x^2\big) \end{aligned}$$

C admet donc en 0 une tangente d'équation $y = \ln 2 + \frac{x}{2}$. En outre, la courbe est située localement au-dessus de la tangente (car $f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2} > 0$ si x petit).

5. A vous de jouer!

Partie II

1.a. On a :

$$\int_x^y \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi}\big[\arctan(y) - \arctan(x)\big].$$

Comme $\arctan(y) < \pi/2$ et $\arctan(x) > -\pi/2$,

$$\int_x^y \varphi(t)dt < 1.$$

1.b. Si c'est toujours inférieur strict à 1, cela ne peut jamais être égal à 1, et donc l'équation n'a pas de solutions.

1.c. $l = 0$. Le but de la partie II étant de nous montrer l'existence de f si $l \neq 0$, cette question prouve que la condition $l > 0$ n'est pas superflue.

2. C'est une simple reformulation :

$$\int_x^y \varphi(t)dt = 1 \iff \phi_x(y) = 1.$$

3.a. ϕ_x est continue, car dérivable comme rappelé par l'énoncé. En outre,

$$\phi_x'(u) = \varphi(u),$$

et cette quantité est strictement positive sauf en un nombre fini de points. ϕ_x est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, ϕ_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\phi_x(\mathbb{R})$. Et la solution de (E_x), si elle existe, est unique!

3.b. Si l est réel, on applique la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$ avec $\varepsilon = l/2$. Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que, si $t \geq t_0$, $\varphi(t) \geq l/2$. On a prouvé le résultat demandé avec $A = l/2$.
Si $l = +\infty$, c'est encore plus facile, car la définition d'une limite infinie s'applique!

3.c. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\phi_x(u) &= \int_x^{t_0}\varphi(t)dt+\int_{t_0}^{u}\varphi(t)dt\\ &\geq A(u-t)+\int_x^{t_0}\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

$\phi_x(u)$ tend donc vers $+\infty$ si u tend vers $+\infty$. En particulier, il existe un $u\geq x$ tel que $\phi_x(u)>1$.

3.d. ϕ_x est continue sur $\mathbb{R}$, vérifie $\phi_x(x)=0$ et $\phi_x(u)>1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y\in[x,u]$ tel que $\phi_x(y)=1$: l'équation (E_x) admet une unique solution!

Partie III

1.

$$\phi_0(x)+1=\int_0^x\varphi(t)dt+\int_x^{f(x)}\varphi(t)dt=\int_0^{f(x)}\varphi(t)dt=\phi_0(f(x)).$$

Maintenant, on sait que ϕ_0 est une bijection, et cette égalité est équivalente à :

$$f(x)=\phi_0^{-1}\big(\phi_0(x)+1\big).$$

2. Il faut commencer à savoir ses théorèmes sur les fonctions réciproques, notamment ici que la fonction réciproque d'une fonction continue strictement croissante est une fonction continue strictement croissante. En particulier, f, par composition, est continue strictement croissante.

3.a. On rappelle que si $y=\phi_0(t)$, et si ϕ_0 est dérivable en x avec $\phi_0'(t)\neq 0$, alors ϕ_0^{-1} est dérivable en y, et :

$$\left(\phi_0^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{\phi_0'(t)}.$$

Ici, $\phi_0'=\varphi$ ne s'annule pas, et donc ϕ_0^{-1} est C^1. Par composition des dérivées, f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x)=\big(\phi_0(x)+1\big)'\times\left(\phi_0^{-1}\right)'\left(\phi_0(x)+1\right).$$

Pour $t=\phi_0^{-1}\big(\phi_0(x)+1\big)=f(x)$, on applique le rappel précédent, et :

$$f'(x)=\varphi(x)\times\frac{1}{\phi_0'\big(f(x)\big)}=\varphi(x)\times\frac{1}{\varphi\big(f(x)\big)}.$$

3.b. Cette question est un peu plus délicate, car pour la traiter rigoureusement, il faut se souvenir de la démonstration de la dérivée d'une composée et d'un produit. On note $\tau(x_0,h)$ le taux d'accroissement de f en x_0 par rapport à la variable h.

$$\begin{aligned}\tau(x_0,h) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= \frac{\phi_0^{-1}\big(\phi_0(x_0+h)+1\big)-\phi_0^{-1}\big(\phi_0(x_0)+1\big)}{h}\\ &= \frac{\phi_0^{-1}\big(\phi_0(x_0+h)+1\big)-\phi_0^{-1}\big(\phi_0(x_0)+1\big)}{\phi_0(x_0+h)-\phi_0(x_0)}\times\frac{\phi_0(x_0+h)-\phi_0(x_0)}{h}.\end{aligned}$$

On note $X_h=\phi_0^{-1}\big(\phi_0(x_0+h)+1\big)=f(x_0+h)$ et $X_0=\phi_0^{-1}\big(\phi_0(x_0)+1\big)=f(x_0)$, de sorte que

$$\phi_0(X_h)-\phi_0(X_0)=\phi_0(x_0+h)-\phi_0(x_0).$$

On a alors :

$$\tau(x_0,h)=\frac{X_h-X_0}{\phi_0(X_h)-\phi_0(X_0)}\times\frac{\phi_0(x_0+h)-\phi_0(x_0)}{h}.$$

Mais,

1. Si $h \to 0$, $X_h \to X_0$, et donc :

$$\frac{X_h - X_0}{\phi_0(X_h) - \phi_0(X_0)} \xrightarrow{h \to 0} \frac{1}{\phi_0'(X_0)} = \frac{1}{\varphi(f(x_0))} = +\infty.$$

2.

$$\frac{\phi_0(x_0+h) - \phi_0(x_0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} \varphi(x_0) \neq 0.$$

On a donc $\tau(x_0,h) \xrightarrow{h\to 0} +\infty$: f n'est pas dérivable en x_0, mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.

4.a. Immédiat!

4.b. On a $\phi_x(f(x)) = 1$, et $\phi_x(x) = 0$. Du fait que ϕ_x est strictement croissante, $x \leq f(x)$. D'autre part, si $x \geq a$, $\phi_x(x+\varepsilon) = \int_x^{x+\varepsilon} \varphi(t)dt \geq \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon} \geq 1$. On a donc aussi $f(x) \leq x + \varepsilon$, ce qui prouve l'encadrement demandé. La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote à la courbe représentative de f.

5. On fixe $l > \varepsilon > 0$. Soit a tel que $x \geq a \implies l - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq l + \varepsilon$. On a alors :

$$\int_x^{f(x)} (l-\varepsilon)dt \leq \int_x^{f(x)} \varphi(t)dt \leq \int_x^{f(x)} (l+\varepsilon)dt,$$

soit encore

$$(l-\varepsilon)(f(x)-x) \leq 1 \leq (l+\varepsilon)(f(x)-x).$$

Après un petit calcul, si $x \geq a$,

$$x + \frac{1}{l+\varepsilon} \leq f(x) \leq x + \frac{1}{l-\varepsilon}.$$

La droite d'équation $y = x + \frac{1}{l}$ est donc asymptote à la courbe représentative de l.

6.a. On a :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \Gamma &\iff y = f(x) \\
&\iff \int_x^y \varphi(t)dt = 1 \\
&\iff \int_x^y \varphi(-t)dt = 1 \\
&\iff \int_{-y}^{-x} \varphi(u)du = 1 \\
&\iff -x = f(-y) \\
&\iff (-x,-y) \in \Gamma,
\end{aligned}$$

où on a successivement utilisé la parité de φ et le changement de variables $u = -t$.

6.b. Soit D la deuxième bissectrice du repère, d'équation $y = -x$. Si $M(x,y)$ est dans le plan, $M'(x',y')$ son symétrique (orthogonal) par rapport à D, alors :

$$\overrightarrow{MM'} \perp (-1;1) \implies -(x'-x) + (y'-y) = 0.$$

D'autre part, puisque $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M' \in D$, on a : $x + x' = -(y+y')$. On obtient alors $y' = -x$ et $x' = -y$. Les coordonnées de M' sont donc $(-y,-x)$. A l'aide de la question précédente, ceci prouve que la courbe est symétrique par rapport à D.

Partie IV

1. On peut factoriser φ pour obtenir $\varphi(x) = (x^2 - 1)^2$. φ est continue, est strictement positive sauf si $x = 1$ ou $x = -1$, elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et est paire.

2. D'après les questions précédentes :

- La droite $y = x$ est asymptote de C_f en $+\infty$ (la courbe est au-dessus de l'asymptote).
- C_f possède la droite $y = -x$ pour axe de symétrie, ce qui permet de se restreindre à construire la moitié de la courbe.
- On a $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $\varphi(x) = 0$: on a une tangente horizontale en les points d'abscisse 1 et -1.
- C_f admet des tangentes verticales en les points pour lesquels $f(x) = 1$, c'est-à-dire en les points d'ordonnée 1 ou -1.

Nous vous laissons le soin de tracer la courbe!