Mines d'Albi,Alès,Douai,Nantes 2000 - Filière MPSI - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : équation fonctionnelle, intégration, équation différentielle, densité, continuité, trace, hyperplan, matrice, théorème du rang, dimension

Commentaires : Problème plutôt facile, surtout pour la filière MPSI. Les questions sont très détaillées. A titre d'exemple, le résultat démontré par le problème d'algèbre fait parfois l'objet d'une question d'oral à l'X. Mais il n'y a aucune question intermédiaire!

Analyse

Partie I

1. C'est évident si on admet les formules de trigonométrie, notamment celles donnant $\cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$.

2. Cf votre cours de sup!

3. Remarquons d'abord que f_α est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tous x et y de $\mathbb{R}$, on a :

$$f_\alpha(x+y)+f_\alpha(x-y)=f(\alpha x+\alpha y)+f(\alpha x-\alpha y)=2f(\alpha x)f(\alpha y)=2f_\alpha(x)f_\alpha(y).$$

Ceci achève de prouver que f_α est aussi dans $\mathcal{E}$.

4. a. En faisant $x=0$ et $y=0$, on trouve $f(0)^2=f(0)$, et donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

b. On fait $y=0$, et on trouve $2f(x)=2f(x)\times 0=0$, et donc f est la fonction identiquement nulle.

c. On fait $x=0$, et y parcourt l'ensemble des réels. Alors :

$$f(y)+f(-y)=2f(y) \implies f(y)=f(-y),$$

et donc f est paire.

Partie II

A.1. a. Le changement de variables $u=x+y$ donne :

$$\int_0^r f(x+y)dy=\int_x^{x+r} f(u)du.$$

b. On intègre l'égalité vérifiée par f entre 0 et r, par rapport à la variable y. On trouve :

$$\begin{aligned}2f(x)\int_0^r f(y)dy &= \int_0^r f(x+y)dy+\int_0^r f(x-y)dy\\ &= \int_x^{x+r} f(u)du+\int_{x-r}^{x} f(v)dv\end{aligned}$$

(la deuxième intégrale est transformée par le changement de variable $v=x-y$).

A.2. a. Comme f est continue, et que $f(0)=1$, il existe $r>0$ tel que, pour x dans $[0,r]$, on ait $f(x)\geq 1/2$. Alors,
$$\int_0^r f(y)dy\geq r/2>0.$$

b. D'après **A.1.b.**, on a :
$$f(x)=\frac{1}{2\int_0^r f(y)dy}\left(\int_x^{x+r}f(u)du+\int_{x-r}^x f(v)dv\right).$$
Or, par le théorème fondamental du calcul intégral,
$$x\mapsto\int_x^{x+r}f(u)du \text{ et } x\mapsto\int_{x-r}^x f(v)dv$$
sont C^1. Il en est de même de f.

c. Il suffit de procéder par récurrence à partir de la formule précédente. Nous avons en effet prouvé que f est C^0, C^1, et si on suppose que f est C^n, alors
$$x\mapsto\int_x^{x+r}f(u)du \text{ et } x\mapsto\int_{x-r}^x f(v)dv$$
sont C^{n+1}, et il en est de même de f!

d. On dérive la formule obtenue en **A.1.b.** :
$$f'(x)=\frac{1}{2\int_0^r f(y)dy}\left(f(x+r)-f(x)+f(x)-f(x-r)\right),$$
d'où le résultat demandé en utilisant la'équation vérifiée par f.

A.3. Nous dérivons la formule précédente :
$$c^2f''(x)=cf'(x+r)-cf'(x-r).$$
Puis on réapplique cette formule, avec $f'(x+r)$ et $f'(x-r)$:
$$\begin{aligned}c^2f''(x)&=f(x+2r)-f(x)-f(x)+f(x-2r)\\&=f(x+2r)+f(x-2r)-2f(x)\\&=2f(x)f(2r)-2f(x)\end{aligned}$$
la dernière égalité étant conséquence de l'équation vérifiée par f. On a donc le résultat, en posant $\lambda=\dfrac{2f(2r)-2}{c^2}$.

B.1. C'est du cours!
- Si $\mu=0$, $y(x)=Ax+B$, A et B étant des constantes.
- Si $\mu>0$, $y(x)=Ae^{\sqrt{\mu}x}+Be^{-\sqrt{\mu}x}$.
- Si $\mu<0$, $y(x)=A\cos(\sqrt{-\mu}x)+B\sin(\sqrt{-\mu}x)$.

B.2. En vertu de **I.4.c.**, nous ne gardons que les fonctions paires parmi les précédentes. En outre, si f n'est pas la fonction nulle, $f(0)=1$, et les coefficients devant les termes en cosinus et en cosinus hyperbolique sont donc égaux à 1. Finalement, nous pouvons conclure que les éléments de $\mathcal{E}$ sont :
- Les fonctions constantes identiquement égales à 0 ou 1.
- Les fonctions $\cos(\alpha x)$.
- Les fonctions $\cosh(\alpha x)$.

B.3. Pour déterminer $\mathcal{F}$, il convient de retirer les constantes, et les cosinus hyperboliques, qui ne s'annulent pas. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont donc les fonctions $\cos(\alpha x)$, où α est un réel non nul!

Partie III

A.1. D'après **I.4.**, $f(0) = 1$. En outre, comme tout élément de $\mathcal{F}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, et que f est paire, f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

A.2 E est une partie non vide (cf ci-dessus) minorée (par 0) de $\mathbb{R}$: elle admet donc une borne inférieure, $a \geq 0$.

A.3. Le raisonnement par l'absurde n'est pas obligatoire! Pour $n \in \mathbb{N}$, par définition de la borne supérieure, il existe u_n dans E avec $a \leq u_n \leq a + \frac{1}{n+1}$. La suite (u_n) converge donc vers a, et $f(u_n) = 0$. Le critère séquentiel de la continuité (f est continue en a), nous dit alors que $f(a) = 0$. Comme $a \geq 0$, et que $f(0) = 1$, alors $a > 0$.

A.4. S'il existe b dans $]0,a[$ avec $f(b) \leq 0$, alors le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue) nous dit qu'il existe c dans $]0,a[$ avec $f(c) = 0$. Alors $c \in E$, et $c < a$: ceci contredit la définition de la borne inférieure.

B.1.a. On applique la relation vérifiée par $\mathcal{F}$ avec $x = y = \frac{a}{2^{q+1}}$.

B.1.b. Le résultat est vrai pour $q = 0$: $f(a) = g(a) = 0$. S'il est vrai à l'ordre q, alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f\left(\frac{a}{2^q}\right)+1\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g\left(\frac{a}{2^q}\right)+1\right)^{1/2} \\ &= g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right), \end{aligned}$$

car g vérifie la même relation que f donnée en **II.B.1.a.** (remarquons qu'il est possible de prendre les racines carrées car les fonctions considérées sont positives dans $[0,a[$).

B.2. Si x est dans D_a, positif, le fait admis prouve que $f(x) = g(x)$. Si x est négatif, la parité des deux fonctions permet de conclure.

B.3. f et g coïncident sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ et sont continues : elles sont donc égales sur $\mathbb{R}$. Précisément, si $x \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite de D_a qui converge vers x. Alors, pour chaque n, $f(u_n) = g(u_n)$, et le passage à la limite donne $f(x) = g(x)$.

C. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont donc toutes les fonctions $\cos(\omega x)$, où ω est un réel non nul.

Algèbre

Partie I

1.a. Soit $M = (M_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux matrices de E, et λ un réel. Alors :

$$T(\lambda M + N) = \sum_{k=1}^{n} \lambda m_{k,k} + n_{k,k} = \lambda \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} + \sum_{k=1}^{n} n_{k,k} = \lambda T(M) + T(N).$$

T s'appelle la trace!

1.b. $\varphi_u : M \mapsto UM$ est linéaire, et $T_U = T \circ \varphi_U$. T_U est donc linéaire comme composée d'applications linéaires, et $T_U \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$.

1.c. On a $Ker(T_U) = H_U$, et donc H_U, comme tout noyau d'une application linéaire, est un sous-espace vectoriel de E.

2.a. $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$ est une base de E.

2.b. $UM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$. On a donc $T(UM) = 0$ si, et seulement si, $a+b+c+d = 0$.

2.c. D'après la question précédente, $T(UE_{1,1}) \neq 0$. $Im\ T_U$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, et il n'est pas réduit au singleton $\{0\}$. Comme les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$, on a $Im(T_U) = \mathbb{R}$, et $dim\ ImT_U = 1$. Le théorème du rang donne $dimH_U = 3$.

2.d. Posons $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. M est inversible, et est dans H_U.

Partie II

1.a. Si $AB = (c_{i,j})$, on a :

$$c_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j}.$$

D'où

$$\begin{aligned} T(AB) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j} \end{aligned}$$

1.b. La première identitité vient de ce que les coefficients de ${}^tA$ sont les $(a_{j,i})$. La deuxième s'obtient en permutant la somme!

2.a. Si U est la matrice nulle, alors $H_U = E$, et $dim\ H_U = n^2$.

2.b. Si $U = (u_{i,j}) \neq 0$, soit (i_0,j_0) tels que $u_{j_0,i_0} \neq 0$. Alors :

$$T(UE_{i_0,j_0}) = u_{j_0,i_0} \neq 0.$$

De même que dans la partie **I**, on en déduit que $Im\ T_U = \mathbb{R}$, et que $dim\ H_u = n^2 - 1$.

3.a.

$$\begin{aligned} T_{i,j}(E_{k,l}) &= T(E_{j,i}E_{k,l}) \\ &= T({}^tE_{i,j}E_{k,l}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = k,\ j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3.b. Comme E^* est de dimension n^2, il suffit de montrer que ces n^2 éléments forment une famille libre. Mais si

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} T_{i,j} = 0,$$

on évalue en $E_{i,j}$ pour prouver que :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} T_{i,j}(E_{i,j}) = \alpha_{i,j} = 0.$$

La famille est donc libre!

4. φ est clairement une application linéaire. En outre, elle envoie la base de E constituée des $E_{j,i}$ sur la base de E^* constituée par les $T_{i,j}$: φ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5.a. La dimension d'un hyperplan vectoriel de E est $n^2 - 1$.

5.b. D'abord, H et $vect(A)$ sont en somme directe. En effet, si $M \in H \cap vect(A)$, alors $M = \lambda A$, et si $\lambda \neq 0$, alors A est dans H, ce qui ne saurait être. Ensuite, $dim(H \oplus vect(A)) = n^2 - 1 + 1 = n^2$. Comme la dimension de E est aussi n^2, on a l'égalité demandée!

5.c. Soit N dans E. N se décompose de manière unique en $M + \lambda A$, où M est dans H. On pose $l(N) = \lambda$. Il est facile de vérifier que N est linéaire (plus généralement, on obtient une application linéaire en recollant des applications linéaires définies sur des sous-espaces vectoriels en somme directe), et il est clair que $H = Ker\ l$.

5.d. L'application l définie à la question précédente peut aussi s'écrire $l = T_U$, en vertu de la question **4.**, où U est une matrice de E. En particulier, $H = Ker\ T_U = H_U$.

Partie III

1.a. On calcule par exemple le rang de P en faisant des permutations de colonnes (en ramenant la dernière colonne en première position, et en décalant toutes les autres colonnes d'un cran vers la gauche). Il est alors clair que le rang de P est n, et que P est inversible.

1.b. On a :

$$\begin{aligned} T_{R_r}(P) &= T(R_r P) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_{j,i} p_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^{r} p_{i,i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit H un hyperplan vectoriel, $H = H_U$ où U est de rang r. On a alors l'existence de deux matrices inversibles S_1 et S_2 telles que $S_1 U S_2 = R_r$. On pose $M = S_2 P S_1$, qui est inversible comme produit de matrices inversibles. Mais :

$$\begin{aligned} T(UM) &= T(S_1^{-1} R_r S_2^{-1} S_2 P S_1) \\ &= T(S_1^{-1} R_r P S_1) \\ &= T(R_r P) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que M est dans H.