Mines d'Albi,Alès,Douai,Nantes 2000 - Toutes filières - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : fonction hyperbolique réciproque, équation différentielle du premier ordre, équation fonctionnelle, binôme, polynôme complexe, décomposition en éléments simples, algèbre linéaire, noyau, rang, base

Commentaires : Ce problème couvre une bonne part du problème de première année. Il met plutôt l'accent sur les calculs effectifs (résolution d'une équation différentielle, recherche de la racine n-ième d'un complexe, décomposition en éléments simples, calcul de l'inverse d'une matrice, détermination d'une base d'un espace vectoriel...) que sur les questions théoriques.

Analyse

Partie I

1. Remarquons que $e^x + e^{-x} \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, et donc tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vérifie :

$$\tanh' x = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0.$$

tanh est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre,

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x = -1$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh x = 1$.

tanh réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

2. Une simple vérification montre que :

$$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x.$$

3. Soit $x \in]-1,1[$. $y = artanh(-x) \iff \tanh y = -x$. Maintenant, tanh est impaire, et :

$$\begin{aligned} y = artanh(-x) &\iff x = \tanh(-y) \\ &\iff -y = artanh(x). \end{aligned}$$

On a donc $artanh(-x) = -artanh(x)$, et donc $artanh$ est impaire. Plus généralement, la démonstration faite ici s'applique à la réciproque de toute fonction impaire.

4. tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée ne s'annule jamais. $artanh$ est donc dérivable, et si $x \in]-1,1[$,

$$artanh'(x) = \frac{1}{\tanh'(artanh(x))} = \frac{1}{1 - [\tanh(artanh(x))]^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

5. Nous intégrons cette dernière inégalité, en remarquant que :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}.$$

On a donc :

$$artanh(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) + Cte.$$

Comme $\tanh 0 = 0$, on a $artanh 0 = 0$, et

$$artanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

6. Nous avons :

$$\begin{aligned} artanh(x) &= -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) \\ &= -\frac{1}{2}\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right] + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right] + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5). \end{aligned}$$

Partie II

7. Résolvons d'abord l'équation homogène (sans second membre) :

$$\begin{aligned} xy' + 3y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y' = \frac{-3y}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{3}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln y = -3\ln x + Cte \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{C}{x^3}. \end{aligned}$$

Pour résoudre (E), on applique par exemple la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{C(x)}{x^3}$. On a alors :

$$xy' + 3y = x\frac{C'(x)}{x^3} = \frac{1}{1-x^2}.$$

On en déduit :

$$C'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} - 1,$$

et donc en intégrant :

$$C(x) = artanh x - x + C.$$

Finalement,

$$y(x) = \frac{artanh x - x + C}{x^3}.$$

Partie III

8. Si $f(x) = C$, alors $C = \frac{2C}{1+C^2}$. Cette équation devient : $C^3 = C$, dont les solutions sont 0,1,-1. Les fonctions constantes solutions sont donc les fonctions identiquement égales à 0, 1 ou -1.

9. Si f est solution, faire $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle donne $f(0) = \frac{2f(0)}{1+(f(0))^2}$, et donc $f(0) \in \{0,1,-1\}$.

10. On a $f(x) = \dfrac{2f(x/2)}{1+(f(x/2))^2} = \dfrac{2a}{1+a^2}$, où $a = f(x/2)$. Maintenant, $(1-|a|)^2 \geq 0$, et donc $2|a| \leq 1+a^2$. En particulier, $|f(x)| \leq 1$.

11. C'est presque évident, en multipliant par -1 de chaque côté de l'égalité, et en remarquant que $(-f(x))^2 = (f(x))^2$.

12. On retrousse ses manches, et on calcule!

$$\begin{aligned}\frac{2\tanh x}{1+(\tanh x)^2} &= 2\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}\\ &= \frac{2(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})\left[(e^x+e^{-x})^2+(e^x+e^{-x})^2\right]}\\ &= \tanh(2x).\end{aligned}$$

13. Comme f est dérivable en 0, elle est en particulier continue en 0, et (u_n) converge vers $f(0)=1$.

14. La relation vérifiée par f se traduit sur la suite par :

$$u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}. \tag{1}$$

Comme $1+u_{n+1}^2 > 0$, u_{n+1} est du même signe que u_n, et par récurrence sur n, on en déduit que (u_n) garde un signe constant.
D'autre part,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}^3 - u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}.$$

- Si $u_0 \geq 0$, $u_{n+1} \geq 0$, et comme $u_{n+1} \leq 1$, $u_{n+1} \geq u_{n+1}^3$, la suite est donc décroissante.
- Si $u_0 \leq 0$, $u_{n+1} \leq 0$, et comme $u_{n+1} \geq -1$, $u_{n+1} \leq u_{n+1}^3$, la suite est donc croissante.

15. Si par exemple $0 \leq u_0 < 1$, alors (u_n) converge vers une limite comprise entre 0 et $u_0 < 1$. C'est absurde car on a prouvé en 13. que (u_n) converge vers 1.
Si $u_0 < 0$, alors (u_n) converge vers une limite négative : c'est tout aussi absurde!

16. Le même raisonnement conduit là-aussi à une contradiction! (seul changement, la distinction suivant $u_0 < 0$ ou $u_0 \geq 0$!).

17. Les seules solutions du problème avec $f(0)=1$ ou $f(0)=-1$ sont les fonctions constantes.

18. S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $f(x_0)=1$, on considère $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$. Alors une récurrence facile s'appuyant sur la formule (**??**) montre que (u_n) est constante égale à 1. Mais comme en 13., (u_n) converge vers $f(0)=0$: c'est absurde! De même si $f(x_0)=-1$.

19. Remarquons que :

$$\begin{aligned}artanh\left(\frac{2y}{1+y^2}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{2y}{1+y^2}}{1-\frac{2y}{1+y^2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y^2+2y}{1+y^2-2y}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\\ &= 2artanh(y).\end{aligned}$$

De celà, on déduit que :

$$g(2x) = artanh\left(\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}\right) = 2artanh(f(x)) = 2g(x).$$

20. Comme f est dérivable en 0, et que $artanh$ est dérivable en $f(0) = 0$, par composition, g est dérivable en 0.

21. Du fait que $g(0) = 0$, v_n peut encore être vu comme un taux d'accroissement :

$$v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0}.$$

Comme g est dérivable en 0, (v_n) converge vers $g'(0)$.

22. Remarquons que

$$v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = \frac{g\left(\frac{2x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{2x}{2^{n+1}}} = \frac{2g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\frac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}.$$

(v_n) est donc une suite constante, et en particulier $v_0 = g'(0)$. De ce fait, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = g'(0)x$, et cette relation est aussi vérifiée pour $x = 0$.

23. Outre les fonctions constantes précédemment évoquées, l'étude faite ici montre que les autres solutions sont les fonctions du type $artanh(\lambda x)$.

Algèbre

Partie I

1. $A(0) = 0$, A ne comporte donc pas de termes constants, et se factorise en XB. En outre, A est de degré $2n$, donc B est de degré $2n - 1$. Le coefficient dominant est 1, et de la formule du binôme par exemple, on tire que le terme constant de B est $b_0 = 2n$.

2. On résoud d'abord $w^{2n} = 1 \iff w = e^{i\frac{k\pi}{n}}$, pour $k = 0,\dots,2n-1$. On en déduit :

$$\begin{aligned} A(z) = 0 &\iff (z+1)^{2n} = 1 \\ &\iff z = -1 + e^{i\frac{k\pi}{n}}, \text{ pour } k = 0,\dots,2n-1 \\ &\iff z = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}, \text{ pour } k = 0,\dots,2n-1 \end{aligned}$$

3. On effectue le changement de variables $k' = 2n - k$:

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k'=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-k')\pi}{2n}\right) \\ &= \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right). \end{aligned}$$

On a donc $P_n \times P_n = Q_n$, et $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4. D'une part, comme B est de degré impair, et est de coefficient dominant 1, le produit de ses racines vaut l'opposé de son terme constant, et :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= Q_n 2^{2n-1} e^{i\frac{\pi}{2n}(1+\cdots+2n-1)} i^{2n-1} \\
&= Q_n 2^{2n-1} e^{i\frac{\pi}{2n}\frac{(2n-1)2n}{2}} i^{2n-1} \\
&= 2^{2n-1} Q_n e^{i(2n-1)\pi} \\
&= -2^{2n-1} Q_n .
\end{aligned}$$

On en déduit que $Q_n = \dfrac{2n}{2^{2n-2}}$ et $P_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}$.

5. On a $F = \dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{2n-1}(X-z_i)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{X-z_k}$, avec $a_k = \frac{1}{A'(z_k)}$. Or, $A'(X) = 2n(X+1)^{2n-1}$, et donc :

$$A'(z_k) = 2n(z_k+1)^{2n-1} = 2n\frac{(z_k+1)^{2n}}{z_k+1} = \frac{2n}{z_k+1}.$$

On en déduit que :

$$a_k = \frac{z_k+1}{2n}.$$

Partie II

6. Si $f = \lambda I_E$, alors $(\lambda+1)^{2n} - \lambda = 0$, et donc $\lambda = z_i$.

7. On a $S_1 = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$, et $S_2 = 2^{2n} = (1-1)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}$. On en déduit que :

$$S_1 + S_2 = 2^{2n} = 2 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k},$$

$$S_1 - S_2 = 2^{2n} = 2 \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

8. Si s est une symétrie, alors $s^{2k} = I_E$ et $s^{2k+1} = s$. Comme I_E et s commutent, l'identité du binôme est vérifiée, et :

$$\begin{aligned}
(s+I_E)^{2n} - I_E &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} I_E + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} s - I_E \\
&= (2^{2n-1}-1) I_E + 2^{2n-1} s.
\end{aligned}$$

En particulier, si l'équation a une solution, s est une homothétie vectorielle qui n'est pas l'identité, et une telle homothétie n'est pas une symétrie. Il n'y a donc pas de symétries qui sont solutions de l'équation.

Partie III

9. On montre très facilement que G est un sous-espace vectoriel. En posant $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (M_1,M_2) engendre G, et c'est clairement une famille libre. C'est donc une base de G, et $\dim G = 2$.

10.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x+y+z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ x+y-2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{y+z}{2} \\ y & = & \frac{y+3z}{4} \\ x+y-2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \\ z & = & z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

En posant $e'_1 = (1{,}1{,}1)$, on a prouvé que (e'_1) est une base de E_1.

11.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \quad x+y+z=0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-z \\ y & = & y \\ z & = & z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On pose $e'_2 = (-1{,}1{,}0)$ et $e'_3 = (-1{,}0{,}1)$. Ces deux vecteurs sont indépendants, et on vient de prouver qu'ils engendrent E_2. Ils forment donc une base de E_2.

12. Nous calculons le rang de ces 3 vecteurs en appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$rg(e'_1,e'_2,e'_3) = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Ces 3 vecteurs sont donc libres, et ils forment une base de E qui est de dimension 3.

13. On a $D(e'_1) = (a+2b)e'_1$, $D(e'_2) = (a-b)e'_2$ et $D(e'_3) = (a-b)e'_3$, soit :

$$D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

14. Rappelons que la matrice de passage d'une base à une autre est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs dans l'ancienne base. Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour l'inverser, on applique aussi par exemple l'algorithme du pivot de Gauss. Nous prenons une notation matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & X \\ 1 & 1 & 0 & Y \\ 1 & 0 & 1 & Z \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & X \\ 0 & 2 & 1 & -X+Y \\ 0 & 1 & 2 & -X+Z \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & X \\ 0 & 1 & 2 & -X+Z \\ 0 & 0 & -3 & X+Y-2Z \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{2X-Y+2Z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-X+2Y-Z}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-X-Y+2Z}{3} \end{array}\right),$$

d'où $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. Les formules de changement de base nous disent que $M = PDP^{-1}$.

16. Nous avons :

$$\begin{aligned} (M+I)^{2n} - I = 0 &\iff (PDP^{-1} + PP^{-1}) - I = 0 \\ &\iff P^{2n}(D+I)^{2n}P^{-2n} - P^{2n}P^{-2n} = 0 \\ &\iff (D+I)^{2n} - I = 0. \end{aligned}$$

17. Nous calculons :

$$(D+I)^{2n} - I = \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ceci est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (a+2b+1)^{2n} & = & 1 \\ (a-b+1)^{2n} & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+2b+1 & = & e^{i\frac{k\pi}{2n}} \\ a-b+1 & = & e^{i\frac{j\pi}{2n}} \end{array}\right. ,k = 0,\ldots,2n-1,\ j = 0,\ldots,2n-1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{i\frac{j\pi}{2n}}) \\ a & = & \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{2n}} + 2e^{i\frac{j\pi}{2n}}) - 1 \end{array}\right. ,k = 0,\ldots,2n-1,\ j = 0,\ldots,2n-1.$$

18. Les matrices solutions de l'équation $(*)$ qui sont dans G sont les PDP^{-1}, où D est une des matrices déterminée en 17.