Problèmes à résoudre avec système d'équation
- Corrigés -

Document proposé par Yoshi – D'autres sont disponibles sur http://www.bibmath.net

1. Soit x le nombre de livres de 3c m d'épaisseur et y celui de 5 cm d'épaisseur.
Il y a 42 livres, d'où la première équation :
On déduit du fait que ces livres occupent 1,50 m soit 150 cm l'écriture de la 2e équation : $3x + 5y = 150$
D'où le système :
$\begin{cases} x+y=42 \\ 3x+5y=150 \end{cases}$ que l'on peut résoudre par substitution en tirant de la 1ere équation $x = 42-y$ que l'on reporte dans la 2e : $3(42-y)+5y = 150$. On développe : $126 - 3y+5y= 150$, soit $126+2y = 150$.
On passe le 126 dans le 2e membre : $2y = 150 - 126$ soit $y = 12$.
Et comme $x = 42 - y$, alors $x = 42 - 12 = 30$.
Vérification : 3*30 + 5*12 = 90+60 = 150. Donc solution du système $(x ;y)=(30 ;12)$
<u>Retour au problème</u> : sur l'étagère, il y a 30 livres de 3 cm d'épaisseur et 12 de 5 cm.

2. Soit x le prix en € d'un briquet et y celui d'une boîte d'allumettes.
S'il achetait 260 boîtes d'allumettes et 30 briquets le commerçant lui rendrait 45 €...
Traduction : 260 boîtes d'allumettes et 30 briquets coûtent 400 - 45 = 355 €.
Ce qui s'interprète par l'équation : $30x + 260y = 355$
mais s'il achetait 160 boîtes d'allumettes et 40 briquets, le commerçant ne lui rendrait que 20 €
Traduction : 160 boîtes d'allumettes et 40 briquets coûtent 400 - 20 = 380 €.
Ce qui s'interprète par l'équation : $40x + 160y = 380$
Il ne coûte rien de simplifier les nombres dans les équations quand on le peut : ici, on divisera par 5 les deux membres de la 1ere équation, par 20 les deux membres de la 2e :
$\begin{cases} 6x+52y=71 \\ 2x+8y=19 \end{cases}$ La méthode la plus rapide ici est la méthode d'addition (ou combinaison) en éliminant les x :
On multiplie les 2 membres de la 2e équation par -3 :
$\begin{cases} 6x+52y=71 \\ -6x-24y=-57 \end{cases}$ on ajoute membre à membre les deux équations $6x-6x = 0$, il reste :
$52y-24y = 71 - 57$ soit $28y = 14$ ce qui donne $y = 0,5$ que l'on reporte dans la 2e équation simplifiée :
$2x + 8*0,5 = 19$ soit $2x = 19 - 4 = 15$ soit $x = 7,5$
Vérification : 6*7.5+ 52*0.5 = 45+26 = 71. C'est juste. La solution du système est $(x ; y) = (7,5 ; 0,5)$.
<u>Retour au problème</u> : le prix d'une boîte d'allumettes est 0,5 €, celui d'un briquet 7,5 €

3. En €, soit x le prix d'un chocolat et y celui d'un soda.
Le soda coûte 0,50 € de plus que le chocolat se traduit ainsi : $y = x +0,5$
2 sodas et 3 chocolats coûtent 28 € se traduit ainsi : $3x + 2y = 11$
D'où le système $\begin{cases} y=x+0,5 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ Là de nouveau, la méthode de résolution la plus simple est la substitution : on remplace y par $x+0,5$ dans la 2e équation : $3x + 2(x+0,5) = 11$ soit $3x + 2x + 1 = 11$ ou encore :
$5x + 1 = 11$. On en tire $x = 2$ qu'on reporte dans la 1ere équation : $y = 2,5$.
Vérification : 3*2 + 2*2.5 = 11. Donc solution du système $(x ;y)=(2 ; 2,5)$
<u>Retour au problème</u> : le chocolat coûte 2 € et le soda, 2,5 €.

4. En €, soit x la somme possédée par la première personne, y celle possédée par la seconde.
Si tu me donnais 100 €, j'aurais alors la même somme que toi. La 1ere personne possède dans ce cas 100 € de plus et la seconde 100 € de moins (qu'elle a donnés à la 1ere) d'où : $x + 100 = y - 100$
Simplifions : $x = y - 200$
Si c'est toi qui me donnes ces 100 €, j'aurai alors le double de ce qui te resterait : qu'on traduit ainsi :
$2(x-100) = y+100$. Simplifions : $2x - y = 300$.
D'où le système : $\begin{cases} x=y-200 \\ 2x-y=300 \end{cases}$ qu'on résout par substitution :
$2(y - 200) - y = 300$ soit $2y - 400 - y = 300$ et on trouve $y = 700$ que l'on reporte dans la première équation :
$x = 700 - 200 = 500$. Vérifications : $500 + 100 = 700 - 100$ et $2(500 - 100) = 700 + 100$.

Donc solution du système ($x ; y$)=(500 ; 700)
Retour au problème : la première personne possède 500 € et la deuxième 700 €.

5. En €, soit x le montant de la première partie des économies et y le montant de la seconde.
Elle en place la première partie à 5 % et l'autre à 6 %, ce qui lui assure un intérêt annuel total de 72 €
L'intérêt est le produit de la somme par le taux : 5% = 0,05. Donc au bout d'un an, le 1er intérêt est 0,05x. La deuxième somme y produit, elle, un intérêt de 0,06y
La phrase se traduit donc ainsi : 0,05x + 0,06y = 72. Équation dont je multiplie les deux membres par 100, pour "supprimer" les virgules : 5x + 6y = 7200...
Si elle inversait les taux de placement, cela ne lui rapporterait que 71 € l'an.
On en déduit la 2e équation : 6x + 5y = 7100. D'où le système :
$\begin{cases}5x+6y=7200\\6x+5y=7100\end{cases}$ Je choisis d'éliminer (par exemple) les x : pour cela je multiplie les 2 membres de la première ligne par 6 et les deux membres de la seconde par -5 :
$\begin{cases}30x+36y=43200\\-30x-25y=-35500\end{cases}$ j'ajoute les deux équations membre à membre, 30x – 30x = 0 : il reste donc :
36y – 25 y = 43200 – 35500 soit 11y = 7700 et on en tire y = 700 que l'on reporte dans l'une ou l'autre équation, par exemple la 2nde : 6x + 5*700 = 7100, soit 6x + 3500 = 7100 et x = 600.
Vérification avec la 1ere équation (puisque le calcul vient d'être fait avec la 2nde) :
600 * 0,05 + 700 * 0,06 = 30 + 42 = 72. Donc solution du système ($x ; y$)=(600 ; 700)
Retour au problème : la première part est 600 € et la deuxième 700 €.

6. En €, soit x la somme possédée par la première personne et y celle possédée par la seconde.
Une personne dispose de 12 € de plus qu'une autre : x = y +12
Après avoir dépensé chacune 36 €... : x - 36 et y - 36
il reste à la première le double de ce qu'il reste à l'autre : x - 36 =2(y – 36)
D'où le système : $\begin{cases}x=y+12\\x-36=2(y-36)\end{cases}$ on peut résoudre classiquement ou écrire $\begin{cases}x=y+12\\x=2(y-36)+36\end{cases}$
Soit encore : $\begin{cases}x=y+12\\x=2y-36\end{cases}$ et on écrit que le x de chaque ligne est le même :
y + 12 = 2y – 36 . Il vient : y – 2y = -36-12 , soit y = 48 d'où x = 60.
Vérification : 60 - 36 = 24 ; 48 – 36 = 12 et 24 = 12 * 2. Donc solution du système ($x ; y$)=(60 ; 48)
Retour au problème : la première personne possède 60 € et la deuxième 48 €.

7. En km, dans le sens de T vers V, soit x la longueur de la montée, et y celle de la descente
Les distances étant établies, et disposant des vitesses, l'équation peut s'écrire :
temps en montée + temps en descente = 1 h 30 = 1,5 h (il faut passer en heures décimales), avec t = d/v.
Un cycliste, dont la vitesse moyenne est de 10 km/h en montée et 30 km/h en descente, met 1 h 30 pour aller de T à V : se traduit par $\frac{x}{10}+\frac{y}{30}=1{,}5$
2 h 30 de V à T : descente et montée sont inversées, donc $\frac{x}{30}+\frac{y}{10}=2{,}5$
D'où le système : $\begin{cases}\frac{x}{10}+\frac{y}{30}=1{,}5\\\frac{x}{30}+\frac{y}{10}=2{,}5\end{cases}$ On multiplie les deux membres de chaque ligne par 30 afin de "supprimer" les dénominateurs. On obtient alors un système plus simple $\begin{cases}3x+y=45\\x+3y=75\end{cases}$ qu'on pourrait résoudre simplement par substitution. Je choisis, pour changer, la méthode d'addition et l'élimination des x en multipliant les deux membres de la 2e équation par – 3 : $\begin{cases}3x+y=45\\-3x-9y=-225\end{cases}$
Par addition membre à membre des 2 équations et comme 3x – 3x = 0, il vient : y - 9y = 45 – 225
Soit -8y = - 180 et y = 22,5. On reporte alors y dans l'une des équations (par ex. la 1ere) et on obtient :
3x +22,5 = 45 et x = 7,5.
Vérifications : 7,5/10 + 22,5/30 = 0,75 + 22,5. Donc solution du système ($x ; y$)=(7,5 ; 22,5)
Retour au problème : de T à V le cycliste monte une côte de 7,5 km de long et enchaîne avec une descente de 22,5 km.

8. En m, soit x la longueur du rectangle et y sa largeur ; son aire est donc xy.
Si l'on augmente la longueur et la largeur de 4 m, l'aire du rectangle augmente de 316 m² :
$(x + 4)(y + 4) = xy + 316$
si l'on augmente la longueur de 4 m tout en diminuant la largeur de 6 m, l'aire du rectangle diminue de 282 m²
$(x + 4)(y – 6) = xy – 282$.

D'où le système : $\begin{cases}(x+4)(y+4)=xy+316\\(x+4)(y-6)=xy-282\end{cases}$

On développe :

$\begin{cases}xy+4x+4y+16=xy+316\\xy-6x+4y-24=xy-282\end{cases}$ On passe les xy dans les 1ers membres et 16 et –24 dans les deuxièmes membres :

$\begin{cases}xy+4x+4y-xy=316-16\\xy-6x+4y-xy=-282+24\end{cases}$ On simplifie : $\begin{cases}4x+4y=300\\-6x+4y=-258\end{cases}$ On multiplie les deux membres de la 2e équation par -1 dans le but d'éliminer les *y :*

$\begin{cases}4x+4y=300\\6x-4y=258\end{cases}$ On additionne membre à membre les 2 équations : $4x + 6x = 300 + 258$

D'où $x = 55,8$ que l'on reporte, par ex, dans la 1ere équation : $4 * 55,8 + 4y = 300$. D'où $4y = 76,8$ et $y = 19,2$
Vérifications.
Aire = 55,8 * 19,2 = 1071,36
Situation 1 : (55,8 + 4) * (19,2 + 4) = 1387.36 et 1387,36 – 1071,36 = 316
Situation 2 : (55,8 + 4) * (19,2 – 6) = 789,369 et 789,36 – 1071,36 = -282
Donc solution du système $(x ; y)=(55,8 ; 19,2)$
Retour au problème : la longueur du rectangle mesure 55,80 m et sa largeur 19,20 m.

9. Archimède avait découvert que "*Tout corps plongé dans un liquide, reçoit de la part de celui-ci une possée verticale dirigée vers le haut égale au poids du volume de liquide déplacé.*"
En dm3, soit x le volume d'or contenu dans la couronne et y celui de l'argent.
L'écart entre 10 kg et 9,375 kg est dû à la poussée exercée par l'eau : il y a donc eu 0,625 kg d'eau déplacé, ce qui correspond à un volume d'eau déplacé de 0,625 dm3 (1 dm3 d'eau - douce – "pèse" 1 kg) ce qui est très exactement le volume de la couronne...
Donc $x + y = 0,625$.
la couronne (...) avait un "poids" de 10 kg. Si j'ajoute le poids du volume d'or et le "poids' du volume d'argentn j'obtiens 10 kg :

$19,64x + 10,5y = 10$. D'où le système : $\begin{cases}x+y=0,625\\19,64x+10,5y=10\end{cases}$ que l'on résout par substitution.

Par ex : $x = 0,625 – y$ que l'on reporte : $19,64(0,625 – y) + 10,5y = 10$ soit en développant :
$12,275 – 19,64y + 10,5y = 10$ soit encore $-9,14y = -2,275$ et $y=2,275/9,14\approx 0,248906$
Et $x\approx 0,625-0,248906\approx 0.376094$
Cherchons le nombre de kg d'or et d'argent :
Or : $19,64\times 0.376094...\approx 7,386486$ - Argent : $10,5\times 0,248906..\approx 2,613513$
Vérification : les arrondis étant correctement faits, on a : 7,386486+2,631513 = 10.017999 kg
Il y a 17g de trop, c'est inévitable à moins de garder un maximum de chiffes après la virgule.
Ainsi
Volume d'argent = 2,275/9,14 (on ne fait pas l'opération).
Poids" : (10,5 * 2,275)/9,14 → 2.61351203501094
Volume d'or : 0,625-2,275/9,14 (on ne fait pas l'opération)
"Poids" : 19,64*(0,625-2,275/9,14) → 7.38648796498906 kg
2,61351203501094 + 7,38648796498906 = 10
Là c'est juste... apparemment ! Apparemment seulement parce que c'est juste à 10^{-14} kg près, les divisions ne se terminant pas ! Il s'agit d'une situation réelle historique et les 9,375 kg pas assez précis...

En principe, on devrait faire les calculs avec des poids, lesquels ne s'expriment pas en kg, unité de mesure des masses. Bien que masse et poids soient deux grandeurs physiques différentes, mais à un coefficient près, les résultats ci-dessus restent justes.

10. Soient x et y les 2 âges actuels.
J'ai le double de ton âge → x = 2y
Quand tu auras le double du mon âge actuel, nous aurons à nous deux 117 ans.
Le double de "mon âge" c'est $2x$. Lorsque celui dont l'âge est y aura $2x$, il se sera écoulé $2x – y$ années, et celui qui parle aura alors $x+2x – y$ ans. D'où l'équation $x+2x – y + 2x = 117$ ou encore $5x – y = 117$ et le système :

$\begin{cases} x=2y \\ 5x-y=117 \end{cases}$ Substitution : 5 * 2y - y = 117 soit 9y = 117 et y = 13. D'où x = 26.

Vérification : lorsque celui qui a 13 ans aura 52 ans (26 * 2), il se sera écoulé 39 ans qui se seront ajoutés à l'âge du premier qui aura alors 65 ans. 65+52 = 117

La première personne a 26 ans, la seconde 13 ans.

11. Soient x et y les âges respectifs actuels du professeur et de son élève.

Il y a 5 ans, je dépassais des deux-tiers de ton âge le quadruple de celui-ci.

Il y a 5 ans, leurs âges s'écrivaient $x-5$ et $y-5$

deux-tiers de ton âge → $\frac{2}{3}(y-5)$ *le quadruple de celui-ci* → $4(y-5)$ (*dépasser = en plus*)

1ere équation : $x-5=4(y-5)+\frac{2}{3}(y-5)$ On multiplie les 2 membres par 3 :

3x – 15 = 12(y – 5)+2(y -5) soit 3x – 15 = 14(y – 5) et encore soit 3x – 15 = 14y – 70 et enfin 3x – 14y = –55

Dans 1 an, il faudra multiplier ton âge par 16/5 pour trouver le mien !

Dans un an, les âges seront x + 1 et y + 1 et on écrira donc $x+1=\frac{16}{5}(y+1)$ On multiplie les 2 membres par 5 : 5x + 5 = 16(y+1) ou encore 5x - 16y = 11

D'où le système : $\begin{cases} 3x-14y=-55 \\ 5x-16y=11 \end{cases}$ On multiplie, par ex., les 2 membres de la première équation par 5 et les deux membres de la deuxième par -3 : $\begin{cases} 15x-70y=-275 \\ -15x+48y=-33 \end{cases}$ on additionne et il vient :

-70y + 48y = -275-33 soit -22y = -308 d'où y = 14 que l'on reporte :

3x – 14*14 = -55 d'où 3x = 141 et x = 47.

Vérifications.

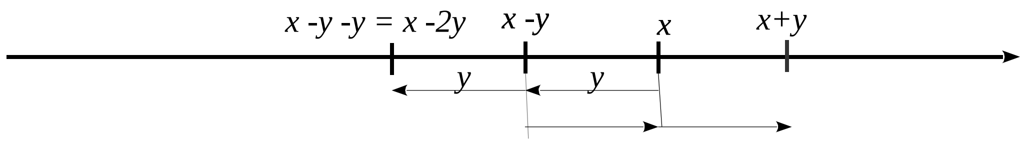
47+1 = 48 ; (14+1)*16/5 = 15 * 16/5 = 3* 16 = 48

47 – 5 = 42 ; 14 – 5 = 9 : 9 * 4 = 36 ; 9 * 2/3 = 6 et 36 = 6 = 42.

Donc solution du système (x ; y)=(47 ; 14)

Retour au problème : le professeur a 47 ans et l'élève 15 ans.

12. Soient x l'âge du plus vieux et y la différence des âges. L'âge du plus jeune est donc x - y



J'ai 2 fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez …

quand j'avais l'âge que vous avez : vous avez (*présent*) x-y et quand j'avais (*imparfait*) cet âge-là, j'étais y années plus jeune... MAIS, **vous aussi :** vous aviez (*imparfait*) donc x-y-y = x- 2y.

J'ai (*présent, donc maintenant*) 2 fois l'âge que vous aviez (*imparfait*) il y a y années auparavant...

Donc x = 2(x-2y).

Quand vous aurez l'âge que j'ai... vous aurez (*futur*) vieilli de y années... Et moi aussi !

Donc vous aurez x (= x - y + y) années et moi x + y : la somme de nos âges sera 63 ans.

D'où l'équation : x + x + y = 63. D'où le système : $\begin{cases} x=2(x-2y) \\ 2x+y=63 \end{cases}$ Substitution : x =2x-4y d'où x = 4y que l'on reporte dans la 2e équation : 8y+y = 63 et y = 7. Il y a 7 ans d'écart. D'où x = 28 et x – y = 21.

Vérifications. 21 – 7 = 14 et 28 = 14 * 2 ; (28+7)+(21+7) =35+28 = 63

Donc solution du système (x ; y)=(28 ; 21)

Retour au problème : les deux personnes ont respectivement 28 et 21 ans