Factorisations

- Corrigés -

Document proposé par Yoshi – D'autres sont disponibles sur http://www.bibmath.net

1. Avec mention du type

(D)

$3x+6y = 3 \times x + 3 \times 2y = \mathbf{3(x+2y)}$; $2a - 4b = 2 \times a - 2 \times 2b = \mathbf{2(a-2b)}$ **;** $3ab - 6ac = 3a \times b - 3a \times 2c = \mathbf{3a\,(b-c)}$

$2ab - 4bd + 6bc = 2b \times a - 2b \times 2d + 2b \times 3c = \mathbf{2b(a-2d+3c)}$

$a^2bc - ab^2c + abc = abc \times a - abc \times b + abc \times 1 = \mathbf{abc(a-b+1)}$. ***Beaucoup oublient le 1 : ne pas le mettre, c'est écrire 0 à la place et en redéveloppant, on n'obtient plus alors que 2 termes au lieu des 3 du départ...***

$x(2x-1)+x(x+3) = x(2x-1+x+3) = \mathbf{x(3x+2)}$

$(x+1)(2x+3)-(x+1)(x-2) = (x+1)[(2x+3) - (x-2)] = (x+1)(2x+3 - x+2) = \mathbf{(x+1)(x+5)}$

Les crochets ici ne sont rien d'autre que des parenthèses droites : on les utilise pour que l'œil fasse mieux la différence avec [(par rapport à ((et pour ne pas oublier les changements de signe dus au -...

$\mathbf{(3x+1)}^2 +2\mathbf{(3x+1)} = (3x+1)(3x+1+2) = \mathbf{(3x+1)(3x+3)} = (3x+1)\times 3(x+1) = \mathbf{3(3x+1)(x+1)}$

Si on veut faire bien on se s'arrête pas à (3x+3) (en 3e, c'est toléré) : on poursuit la factorisation...

$\mathbf{(5x+1)}^2 -2\mathbf{(5x+1)}(3x-2) = (5x+1)[(5x+1)-(3x-2)] = (5x+1)(5x+1-3x+2) = \mathbf{(5x+1)(2x+3)}$

Là encore il y a un – qu'on va retrouver après le 5x+1 : il ne s'adresse pas qu'à 3x mais à (3x-2) : pour éviter d'oublier le changement de signes qu'il entraîne, on laisse les parenthèses autour de (3x-2), et à cause de cela, on inclut le 2e facteur tout entier entre crochets...

$(2x-3) + (2x-3)^2 = (2x-3)\,(\mathbf{1}+2x-3)= (2x-3)(2x-2) = \mathbf{2(x-1)(2x-3)}$ ***(*) Pour le nombre 1 voir 3e ligne en partant du haut , pour la poursuite de la factorisation après 2x – 2, voir au-dessus. A partir de ce exercice le signe x ne sera plus écrit (il n'est jamais nécessaire de décomposer) sauf si sa présence aide vraiment à la compréhension...***

$(x+2)^2-(x+2)(x+3)+x(x+2) = (x+2)[(x+2)-(x+3)+x] = (x+2)(x+2-x-3+x) = \mathbf{(x+2)(x-1)}$

$(2x-3)(x+1)-2x+3 = (2x-3)(x+1)-(2x-3) = (2x-3)(2x-3-1) = (2x-3)(2x-4) = \mathbf{2(2x-3)(x-2)}$ ***Nécessité d'une modif .préalable : -2x+3 = -(2x-3). Pour les autres commentaire voir (*).***

$5(3x-2)(x-1)-3(3x-2)^2 = (3x-2)[5(x-1)-3(3x-2)] = (3x-2)(5x-5-9x+6) = \mathbf{(3x-2)(-4x+1)}$

(P_1)

$x^2+6x+9 = x^2+6x+3^2 = \mathbf{(x+3)^2}$; $x^2+10x+25 = x^2+10x+5^2 = \mathbf{(x+5)^2}$; $x^2+16x+64 = x^2+16x+8^2 = \mathbf{(x+8)^2}$;

$4x^2+12x+9 = (2x)^2+12x+3^2 = \mathbf{(2x+3)^2}$; $4x^2+20x+25 = (2x)^2+20x+5^2 = \mathbf{(2x+5)^2}$

À ce stade, il vaut mieux attirer votre attention sur une erreur possible : $25x^2+ 30x+16 \neq (5x+4)^2$. Certes $(5x)^2 = 25x^2$ et $16 = 4^2$ mais 2 x 5x x 4 = 40x et non 30x !!! Cette remarque vaut aussi pour le type (P_2). Toujours vérifier, donc...

$1+14x+49x^2 = (1+7x)^2$; $\frac{1}{4}+x+x^2$ ***une "méchanceté" à l'intention de ceux qui n'aiment pas les fractions... Bin ???? Il est où le double produit ? Mais ici :*** $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $x^2 = (1x)^2$ et $2\times\frac{1}{2}\times 1\,x=x$ d'où $\frac{1}{4}+x+x^2=\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$

Pourquoi tous ces calculs seraient-ils donc réservés à des nombres entiers ?....

$(3x-2)^2+2(3x-2)(x-1)+(x-1)^2 = (3x-2+x-1)^2 = (4x-3)^2$ ***Ici comme pour le suivant, la vérification se fait sans calcul...***

$(2x-3)^2+2(2x-3)(x+4)+(x+4)^2 = (2x-3+x+4)^2 = (3\mathbf{x}+1)^2$

(P_2)

$x^2-2x+1 = \mathbf{(x-1)^2}$; $x^2-6x+9 = \mathbf{(x-3)^2}$; $x^2-18x+81 = \mathbf{(x-9)^2}$; $4x^2-4x+1 = \mathbf{(2x-1)^2}$ **;** $\mathbf{25-30x+9x^2 = (5-3x)^2}$

Noter au passage que $\mathbf{(5-3x)^2} = [-(3x-5)]^2 = (-1)^2 \times (3x-5)^2 = (3x-5)^2$: la réponse $(3x-5)^2$ ***était également exacte...***

$4x^2-20x+25 = \mathbf{(2x-5)^2}$; $81-126x+49x^2 = \mathbf{(9-7x)^2}$ ou $\mathbf{(7x-9)^2}$; $12x^2-60x+75$: ***pas de carrés, pas de double produit ? En apparence seulement : 12, 60 et 75 sont des multiples de 3 (d'où le T)... Donc :***

$12x^2-60x+75 = 3(4x^2-20x+25) = \mathbf{3(2x-5)}^2$

$25x^2-2x+\frac{1}{25}=(5x)^2-2\times 5x\times\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^2=\left(5x-\frac{1}{5}\right)^2$

$(2x-3)^2-2(2x-3)(x-5)+(x-5)^2 = [2x-3-(x-5)]^2 = (2x-3-x+5)^2 = \mathbf{(x+2)^2}$

$4(2x-3)^2-12(2x-3)(x+4)+9(x+4)^2$ ***Petite factorisation :***

$4(2x-3)^2-12(2x-3)(x+4)+9(x+4)^2 = 2^2(2x-3)^2-12(2x-3)(x+4)+3^2(x+4)^2 = [2(2x-3)]^2 - 2 \times 2(2x-3) \times 3(x+4)+[3(x+4)]^2$

D'où : $4(2x-3)^2-12(2x-3)(x+4)+9(x+4)^2 = [2(2x-3)-3(x+4)]^2 = (4x-6-3x-12)^2 = \mathbf{(x-18)^2}$

(P$_3$)

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = \mathbf{(x+2)(x-2)}$; $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = \mathbf{(2x+1)(2x-1)}$; $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = \mathbf{(2x+3)(2x-3)}$

$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = \mathbf{(3x+2)(3x-2)}$; $(3x-4)^2 - 25 = (3x-4)^2 - 5^2 = (3x-4+5)(3x-4-5) = (3x+1)(3x-9) = \mathbf{3(3x+1)(x-3)}$

$9x^2- (4x+5)^2 = (3x)^2 - (4x+5)^2 = (3x + 4x+5)[3x-(4x+5)] = (3x+4x+5)(3x-4x-5) = \mathbf{(7x+5)(-x-5)}$

$25x^2- (3x-5)^2 = (5x)^2 - (3x-5)^2 = (5x + 3x-5)[5x- (3x-5)] = (5x+3x-5)(5x-3x+5) = \mathbf{(8x-5)(2x+5)}$

$(4x+3)^2 - (3x-5)^2 = (4x+3+3x-5)[4x+3-(3x-5)] = (7x-2)(4x+3-3x+5) = \mathbf{(7x-2)(x+8)}$

$(3x-1)^2 - (2x-1)^2 = (3x-1+2x-1)[3x-1-(2x-1] = (5x-2)(3x-1-2x+1) = \mathbf{(7x-2)(x) = x(7x-2)}$ ***Cette dernière écriture est préférable parce que plus claire et plus simple, surtout que certaine n'auraient pas mis de parenthèses autour de x... Tant que le facteur est positif, passe encore, mais dès que le facteur est négatif, par exemple -2x, le produit n'en est plus que cdans votre esprit : vous avez écrit une somme (algébrique) par méconnaissance des règles de simplification d'écriture et de priorité des opérations !***

$(3x+2y-1)^2 - (2x+3y-4)^2 = (3x+2y-1+ 2x+3y-4)[3x+2y-1-(2x+3y-4)] = (5x+5y-5)(3x+2y-1-2x-3y+4)$
$= (5x+5y-5)(x-y+3) = \mathbf{5(x+y-1)(x-y+3)}$

$4(x+3)^2 - (3x-5)^2 = 2^2(x+3)^2 - (3x-5)^2 = [2(x+3)]^2 - (3x-5)^2 = [2(x+3)+(3x-5)][2(x+3)-(3x-5)]$
$= (2x+6+3x-5)(2x+6-3x+5) = \mathbf{(5x+1)(-x+11)}$

$4(3x-2)^2 - 9(2x+5)^2 = 2^2(3x-2)^2 - 3^2(2x+5)^2 = [2(3x-2)]^2 - [3(2x+5)]^2 = [2(3x-2)+3(2x+5)][2(3x-2)-3(2x+5)]$
$= (6x-4+6x+15)(6x-4-6x-15) = (12x+11)(-19) = \mathbf{-19(12x+11)}$ ***Et là écrire*** $(12x+11)-19$ ***était faux !***

$(3x-1)^2 - (2x-3)^2 - (x+2)(x-5) = (3x-1+2x-3)(3x-1-2x+3) - (x+2)(x-5) = (5x-4)(x+2)- (x+2)(x-5)$
$= (x+2)[5x-4-(x-5)] = (x+2)[5x-4-x+5] = \mathbf{(x+2)(4x+1)}$

2. Sans mention du type, en vrac, mais difficulté croissante.

Mais les types seront précisés dans les solutions...

$x^2-25 = \mathbf{(x+5)(x-5)}$ (P$_3$) ; $3a^2bc-12ab^2c+ 15abc^2 = 3abc(a-4b+5c)$ (D) ; $x^2-10x+25 = \mathbf{(x-5)^2}$ (P$_2$)

$4x^2-20x+25 = \mathbf{(2x-5)^2}$ (P$_2$) ; $(x+1)(2x-3)+(x+1)(3x+1) = \mathbf{(x-1)(5x-2)}$; $(2x-3)^2- (2x-3)(x-5) = \mathbf{(2x-3)(x+2)}$ (D)

$(2x-3)(x+1)-2x+3 = (2x-3)(x+1-1) = \mathbf{x(2x-3)}$ (D) et (T) ; $(3x+1)^2+2(3x+1)(-x+2) = \mathbf{(3x+1)(x+5)}$ (D)

$(3x+1)^2 - (2x+1)^2 = \mathbf{x(5x+2)}$ (P$_3$) ; $(3x-2)^2+6(3x-2)+9 = \mathbf{(3x+1)^2}$ (P$_1$)

$(2x-3)(5x-1) + (6x-9)(3x-2) = (2x-3)(5x-1) + 3(2x-3)(3x-2) = (2x-3)(14x-7) = \mathbf{7(2x-3)(2x-1)}$ (D) et (T)

$(2x-3)(3x+4) + (-6x+9) = (2x-3)(3x+4)-3(2x-3) = \mathbf{(2x-3)(3x+1)}$ (D) et (T)

$(2x-3) + (2x-3)^2 = (2x-3)(2x-2) = \mathbf{2(2x-3)(x-1)}$ (D) ; $(5x-1)^2 - 4(x-2)^2 = (5x-1)^2 - [2(x-2)]^2$
$= (7x-5)(3x+3) = 3\mathbf{(7x-5)(x+1)}$ (P$_3$) (T)

$(x+2)^2-2(x+2)(x+3)+3x(x+2) = (x+2)[x+2-2(x+3)+3x] = (x+2)(2x-4) = \mathbf{2(x+2)(x-2)}$ (D)

$(3x-2)^2-2(3x-2)(x-5)+(x-5)^2 = (3x-2-x+5)^2 = \mathbf{(2x+3)^2}$ (P$_2$)

$25(x-2)^2-30(x-2)(x-5)+9(x-5)^2 = [5(x-2)]^2 - 2 \times 5(x-2) \times 3(x-5)+ [3(x-5)]^2 = [5(x-2)-3(x-5)]^2$
$= (5x-10-3x+15)^2 = \mathbf{(2x+5)^2}$ (P$_2$) et (T)