ÉCOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI **CONCOURS D'ADMISSION 2018**
ENS : ULM, CACHAN, LYON

Composition de Mathématiques, Filière PC (XEULC)

Les notes des 1272 candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	73	5,74 %
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	672	52,83 %
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	396	31,13 %
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	102	8,02 %
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	29	2,28 %
Total	1272	100 %
Nombre de candidats :	1272	
Note moyenne :	7,9	
Écart-type :	3,07	

Commentaires généraux

Comme indiqué en introduction au sujet, celui-ci s'intéressait « aux matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1, et en particulier à la différence maximale entre le nombre de 1 et le nombre de -1 que l'on peut obtenir, si l'on s'autorise à multiplier certaines lignes et colonnes d'une telle matrice par -1 ». Il était en progression de difficulté lente au sein des différentes parties, chacune d'entre elles étant de difficulté similaire hormis la dernière qui était singulièrement plus difficile puisqu'elle invitait le candidat à adapter les raisonnements des parties **II** et **III** pour résoudre un problème similaire. La présence de multiples questions intermédiaires proposait un découpage très détaillé facilitant ainsi la résolution de nombreuses questions.

Rappelons que le candidat a grand intérêt à lire le sujet intégralement avant de commencer à le traiter et à faire preuve de perspicacité pendant cette lecture.

Il est regrettable qu'une partie non négligeable des candidats fassent preuve d'un manque de rigueur sur des questions élémentaires comme la multiplication à gauche ou à droite par une matrice diagonale, le calcul des valeurs propres d'une matrice carrée d'ordre deux...

Les correcteurs ont apprécié les efforts faits par une grande partie des candidats dans leur rédaction. Il faut maintenir celui-ci en continuant non seulement à énoncer entièrement les théorèmes mais en vérifiant aussi toutes leurs hypothèses. Il faut également être clair et précis dans sa rédaction et ne pas omettre de quantificateurs aux passages cruciaux des démonstrations. Entre autres, il est important de bien mettre en évidence les points clés d'une démonstration (nom d'un théorème, hypothèse importante utilisée, etc), en les entourant par exemple. C'est plus important que d'entourer la solution elle-même (que le correcteur connait, voire qui est donnée dans le sujet) et cela détermine pour le correcteur la compréhension ou non de la question par le candidat. Dans le même ordre d'idée, lorsque les candidats utilisent les résultats des questions précédentes, il faut absolument les mentionner proprement.

Concernant la présentation des copies, le nombre de copies très mal écrites, est heureusement en diminution. Il faut absolument que les candidats aient en mémoire que la copie est un endroit où l'on rend un résultat propre, abouti, réfléchi et rédigé. Ce n'est pas une feuille de brouillon ! Nous avons encore tenu compte cette année de la présentation dans la notation.

Concernant la stratégie, c'est en faisant avec soin les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on gagne réellement des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. On peut dire sans exagérer qu'environ 75% des candidats font le même lot de questions, avec plus ou moins de bonheur. Les candidats qui font vraiment la différence sont ceux qui font deux ou trois questions plus difficiles, plus longues, où il y a un raisonnement en 2 ou 3 étapes à faire. Par ailleurs, il est également stratégiquement intéressant de répondre correctement et avec soin, sans les bâcler, aux premières questions du sujet.

La qualité de la présentation et de la rédaction était notée sur 2,1 points. Passons maintenant au détail, question par question.

I – Première partie

Cette première partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 3,4 points.

I.1. Il n'est pas admissible de ne pas déterminer correctement (à vue) le cardinal demandé ou de ne pas remarquer qu'il ne s'agit pas d'un espace vectoriel (il ne contient pas la matrice nulle !). Heureusement la plupart des candidats a répondu correctement à cette question.

I.2. La très grande majorité des candidats a su prouver l'inclusion. Un peu moins a réussi à montrer la symétrie. Par contre, ils sont peu à avoir prouvé l'inclusion stricte de manière satisfaisante et générale malgré l'indication précieuse fournie par l'énoncé.

I.3. Beaucoup de candidats ont eu l'intuition de la preuve de ce résultat. Malheureusement, sans s'en rendre compte, une partie d'entre eux n'a montré qu'une inclusion.

I.4. Dans cette question, on calcule S pour deux cas particuliers puis à l'aide de la question **I.3.** et en raisonnant sur la parité du nombre de 1 dans une matrice $A \in \mathcal{M}_2(-1;1)$ on en déduit S dans le cas général. Si le calcul des cas particuliers $S(I)$ et $S(J)$ est l'une des questions les mieux réussies par les candidats, au contraire celui de S dans le cas général est l'une des questions les moins bien traitées.

I.5. Cette question a été abordée par la plupart des candidats qui ont généralement réussi à montrer l'une ou l'autre des implications de manière satisfaisante. Toutefois l'implication la plus difficile, $(a) \Rightarrow (b)$, n'a été justifiée de manière satisfaisante que par une minorité des candidats.

I.6. Cette question a donné lieu à toutes les excentricités : du candidat qui n'a pas lu la question puisqu'il ne calcule pas une proportion à celui qui ne sait pas calculer le nombre de matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(-1;1)$. Il fallait en effet utiliser l'équivalence de la question **I.5.** pour ramener le problème au calcul de la proportion de matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(-1;1)$.

II – Deuxième partie

Cette deuxième partie, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 5,4 points.

II.1. L'utilisation de développements en série entière permettait de résoudre facilement cette question. Une étude de fonction a aussi été utilisée par certains. Malheureusement beaucoup de candidats ont appliqué de manière erronée une inégalité classique de convexité ou sur la fonction logarithme. Autre grande source d'erreurs, des raisonnements erronés basés sur les développements limités (en négligeant complètement les "petits o" par exemple). Ainsi le nombre de réponses correctes à cette question est assez faible et décevant.

II.2. L'inégalité de Markov était au cœur de la preuve de l'inégalité demandée. Beaucoup de candidats en ont eu l'intuition mais peu ont su écrire un raisonnement complet.

II.3. Pour obtenir l'inégalité de Hoeffding, il suffisait de minimiser la fonction majorante résultant de l'utilisation des deux questions précédentes **II.1.** et **II.2.**. Cette question a eu un peu plus de succès que la précédente.

II.4. Beaucoup de candidats ont essayé de montrer le résultat demandé sur la famille $(x_i y_j C_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Généralement, la preuve proposée était incomplète. Au choix, certains ont oublié de : prouver l'indépendance, déterminer les lois ou d'indiquer qu'il y avait bien n^2 variables.

II.5. Seule une très faible partie des candidats a traité cette question de manière satisfaisante.

II.6. De même, une très faible partie des candidats a résolu cette question.

III – Troisième partie

Cette partie III, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 4,7 points.

III.1. Une question simple qui a été abordée par la plupart des candidats. On pouvait commencer par utiliser l'inégalité triangulaire puis penser montrer que le majorant obtenu était atteint pour un X particulier.

III.2. La première partie de la question n'a été traitée correctement que par peu de candidats alors qu'une grande partie a su prouver la seconde partie de la question qui découlait de la formule pour g_A établie à la question **III.1.**. Pour la première partie, on pouvait commencer par vérifier que, comme à la question **II.4**, les variables aléatoires $(a_{i,j}Z_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ sont indépendantes et uniformes sur $\{-1;1\}$. Il suffit donc de montrer le résultat pour les $a_{i,j}$ tous égaux à 1.

III.3.a. Beaucoup de candidats ont essayé de montrer cette égalité mais finalement peu y sont parvenus de manière satisfaisante. Il ne suffit pas d'écrire une suite d'égalités « a peu près justes » qui partent du membre de gauche de l'égalité écrite dans l'énoncé pour arriver au résultat qui lui aussi était fourni dans l'énoncé. Le résultat attendu étant donné, le correcteur s'attend évidemment à ce que les points importants du raisonnement soient clairement mis en avant, d'autant plus qu'il suffisait d'utiliser la formule de Pascal.

III.3.b. Très peu de candidats ont réussi cette question. Il suffisait de scinder en deux la somme obtenue à la question **III.3.a.** puis de procéder à un changement d'indice tirant convenablement parti des symétries.

III.4.a. Dans cette question, on pouvait utiliser le fait qu'une variable aléatoire réelle positive ne peut être bornée supérieurement par un nombre strictement plus petit que son espérance. Cette question a eu peu de succès auprès des candidats.

III.4.b. Une bonne partie des candidats a essayé de trouver l'équivalent demandé à partir du résultat de la question **III.4.a.**. La simplification de l'expression obtenue à l'aide de la formule de Stirling a été trop souvent menée de manière incorrecte.

IV – Quatrième partie

Cette première partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 2,3 points.

IV.1. La plupart des candidats ont bien traité cette question. Il est à regretter que certains des candidats se soient trompés sur la valeur de I_n qui est pourtant un résultat classique.

IV.2. Une petite moitié des candidats ont plutôt bien traité cette question, même si malheureusement un nombre trop important d'entre eux n'a pas su procéder correctement au changement de variable.

IV.3.(a) Il est regrettable que seule une petite partie des candidats ait réussi à prouver cette inégalité.

IV.3.(b) De même, seule une petite partie des candidats a réussi à prouver cette inégalité alors qu'elle résultait, par exemple, d'une simple étude de fonction.

IV.4. Il s'agissait de combiner les résultats précédents pour appliquer, par exemple, un théorème de convergence dominée. Une très faible partie des candidats a traité cette question.

V – Cinquième partie

La cinquième et dernière partie n'a été traitée, même partiellement, que par une fraction infime des candidats. Et une fraction encore plus infime y a obtenu des points. Cette cinquième partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 2,1 points.

V.1. Cette question n'a été abordée que par une infime partie des candidats. Une idée, par exemple, était d'utiliser un raisonnement par récurrence.

V.2. À nouveau, seule une poignée de candidats a abordé la question.