ÉCOLE POLYTECHNIQUE-ESPCI **CONCOURS D'ADMISSION 2017**
ENS : ULM, LYON, CACHAN

Composition de Mathématiques, Filière PC (XEULC)

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant N < 4$	4	0,31 %
$4 \leqslant N < 8$	408	31,36 %
$8 \leqslant N < 12$	617	47,43 %
$12 \leqslant N < 16$	223	17,14 %
$16 \leqslant N \leqslant 20$	49	3,77 %
Total	1301	100 %
Nombre de candidats : 1301		
Note moyenne : 9,73		
Écart-type : 2,98		

Commentaires généraux

Le sujet s'intéressait au rayon spectral et à ses propriétés en rapport avec les matrices strictement positives. Il était en progression de difficulté lente, la fin de la deuxième partie puis la troisième et dernière partie comportant les questions les plus difficiles. La présence de multiples questions intermédiaires proposait un découpage très détaillé facilitant ainsi la résolution de nombreuses questions.

Rappelons que le candidat a grand intérêt à lire le sujet intégralement avant de commencer à le traiter et à faire preuve de perspicacité pendant cette lecture.

Il est regrettable qu'une partie non négligeable des candidats fassent preuve d'un manque de rigueur sur des questions élémentaires comme la multiplication à gauche ou droite par une matrice diagonale, le calcul des valeurs propres d'une matrice carrée d'ordre deux.

Les correcteurs ont apprécié les efforts faits par une grande partie des candidats dans leur rédaction. Il faut maintenir celui-ci en continuant non seulement à énoncer entièrement les théorèmes mais en vérifiant aussi toutes leurs hypothèses. Il faut également être clair et précis dans sa rédaction et ne pas omettre de quantificateurs aux passages cruciaux des démonstrations. Entre autres, il est important de bien mettre en évidence les points clés d'une démonstration (nom d'un théorème, hypothèse importante utilisée, etc), en les entourant par exemple. C'est plus important que d'entourer la solution elle-même (que le correcteur connait) et cela détermine pour le correcteur la compréhension ou non de la question par le candidat. Dans le même ordre d'idée, lorsque les candidats utilisent les résultats des questions précédentes, il faut absolument les mentionner proprement.

Concernant la présentation des copies, le nombre de copies très mal écrites, est heureusement en diminution. Il faut absolument que les candidats aient en mémoire que la copie est un endroit où l'on rend un résultat propre, abouti, réfléchi et rédigé. Ce n'est pas une feuille de brouillon ! Nous avons encore tenu compte cette année de la présentation dans la notation.

Concernant la stratégie, c'est en faisant avec soin les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on gagne réellement des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. On peut dire sans exagérer qu'environ 75% des candidats font le même lot de questions, avec plus ou moins de bonheur. Les candidats qui font vraiment la différence sont ceux qui font deux ou trois questions plus difficiles, plus longues, où il y a un raisonnement en 2 ou 3 étapes à faire.

La qualité de la présentation et de la rédaction était notée sur 2,1 points. Passons maintenant au détail, question par question.

I – Première partie

Cette première partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 3,2 points.

(1)(a) La plupart des candidats ont plutôt bien traité cette première question, même si malheureusement un nombre trop important d'entre eux n'ont en fait montré qu'un seul sens de l'équivalence.

(1)(b) Pour un très grand nombre de candidats la définition d'une norme n'est pas acquise, ce qui regrettable à ce niveau.

(2) Cette question a été d'une difficulté inattendue. Très peu de candidats ont montré avec succès que la norme subordonnée est une norme d'algèbre.

(3) Là encore cette égalité n'a souvent été montrée qu'à moitié, les candidats ne montrant en fait qu'une inégalité.

(4) Cette question a été abordée par la plupart des candidats qui ont généralement réussi à montrer l'équivalence de manière satisfaisante.

(5)(a) Beaucoup ont réussi ce calcul. Certains ont obtenu un résultat nul ou ne dépendant pas de b mais cela ne les a pas inquiété malgré les questions suivantes.

(5)(b) Moins d'un candidat sur deux a su correctement invoquer la continuité ou majorer convenablement le résultat de **(5)(a)** pour obtenir l'existence de b telle que l'inégalité demandée était vraie.

(5)(c) La convergence demandée découlait naturellement des résultats des questions précédentes. Elle n'a été prouvée correctement que dans moins d'une copie sur deux.

II – Deuxième partie

Cette deuxième partie, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 5,8 points.

(6) Il n'est pas admissible de ne pas déterminer correctement (à vue) les valeurs propres des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Malheureusement un nombre déraisonnable de candidats n'y est pas parvenu. Ces matrices permettaient de construire des contre-exemples pour la question **(7)**.

(7) L'intuition des candidats a été généralement bonne même si les copies ayant évalué correctement la véracité des cinq assertions sont rares. Les matrices introduites à la question **(6)** permettaient de construire des contre-exemples simples pour les assertions ii) et iii), les trois autres se prouvant facilement en revenant à la définition d'une valeur propre.

(8) Cette question, pourtant simple, n'a été traitée correctement que peu de fois.

(9) Une trigonalisation (à justifier) et l'application de la question **(5)** permettait de résoudre rapidement cette question. Ceci n'a été vu que par peu de candidats.

(10)(a) Cette question a été la source d'erreurs dans la manipulation élémentaire d'inégalités qui se sont retrouvées renversées « par magie » afin d'aboutir au résultat de l'énoncé.

(10)(b) Pour montrer cette égalité, il était raisonnable de procéder par double inclusion. Un bon nombre de candidats a réussi à montrer l'une d'entre elles mais très peu a proposé une preuve correcte des deux.

(11) Cette question qui était pourtant une conséquence directe des questions **(10)(a)** et **(10)(b)** n'a été résolue que dans un nombre très faible de copies.

(12) Cette question, qui nécessitait de faire un petit raisonnement pour montrer par récurrence que, pour tout $k \geqslant 1$, $(A^k)_+ \leqslant (A_+)^k$ puis pour obtenir l'inégalité demandée par passage à la limite, n'a été résolue que dans un nombre infime de copies.

III – Troisième partie

La troisième et dernière partie n'a été traitée, même partiellement, que par une fraction infime des candidats. Et une fraction encore plus infime y a obtenu des points. Cette partie III, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 8,9 points.

(13) Un nombre infime de candidats a su montrer cette inégalité qui n'était pas une application directe de celle de Cauchy-Schwarz comme beaucoup ont essayé de le faire croire.

(14) Une question simple, pour laquelle il suffisait d'évaluer ${}^t xAy$ de deux manières différentes.

Pourtant moins d'un candidat sur trois a su la traiter convenablement.

(15)(a) Lorsque l'énoncé demande de montrer une propriété, il ne faut pas écrire qu'elle est évidente. Il faut proposer une preuve de celle-ci. Ici, une récurrence suffisait. L'inégalité finale résultait d'un passage à la limite de l'inégalité $||A^k w||/||w^k|| \geqslant |\mu|$.

(15)(b) Une très petite partie des copies propose une solution à cette question qui est généralement incorrecte. Il fallait penser à utiliser l'inégalité stricte de départ pour glisser un ϵ qui se propage jusqu'à l'inégalité demandée.

(15)(c) Là encore, un très petit nombre de candidat a proposé une solution correcte même si la plupart ont senti qu'il fallait utiliser **(15)(b)**.

(16)(a) Une bonne partie des candidats ayant essayé de montrer l'inégalité $Av_0 \geqslant v_0$ y sont parvenus. Malheureusement, ils n'ont pas tous pensé à se servir de **(15)(c)** pour obtenir l'égalité $Av_0 = v_0$.

(16)(b) Question simple qui a eu très peu de succès.

(16)(c) Une petite partie des candidats a utilisé la question **(13)** pour justifier la colinéarité, l'égalité finale en découlant directement.

(17)(a) De très rares propositions de réponses qui se sont souvent limitées à montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ ou la stabilité de F par φ_A.

(17)(b) Cette question reposait sur l'utilisation de la question **(14)**, ce qui n'a été vu que par très peu de candidats.

(18)(a) Une infime partie des candidats a abordé la question qui était pourtant bien détaillée avec une progression guidant sa résolution. Elle utilisait **(16)(c)**.

(18)(b) Cette question n'a été abordée que par une infime partie des candidats. Une idée, par exemple, était d'utiliser la question précédente **(18)(a)** et la question **(10)(b)**.

(18)(c) À nouveau, une infime partie des candidats a abordé la question. Pour trouver la limite, il suffit de décomposer x à l'aide de la somme directe $\mathbb{C}^n = F \oplus \mathbb{C}v_0$ puis d'appliquer la question précédente **(18)(b)**.