**Composition de Mathématiques, Filière PC**
**(XEULC)**

Les notes des candidats français se répartissent selon les données du tableau suivant :

| | | |
|---|---|---|
| $0 \leqslant N < 4$ | 31 | 2,26 % |
| $4 \leqslant N < 8$ | 616 | 44,87 % |
| $8 \leqslant N < 12$ | 587 | 42,75 % |
| $12 \leqslant N < 16$ | 117 | 8,52 % |
| $16 \leqslant N \leqslant 20$ | 22 | 1,60 % |
| Total | 1373 | 100 % |
| Nombre de copies : 1373 | | |
| Note moyenne : 8,45 | | |
| Écart-type : 2,77 | | |

## Commentaires généraux

Le sujet s'intéressait à la définition et à l'étude de l'entropie d'un point de vue mathématique ainsi qu'à la détermination de son maximum sous différentes contraintes. Il était en progression de difficulté lente, la troisième et dernière partie comportant les questions les plus difficiles. La présence de multiples questions intermédiaires proposait un découpage très détaillé facilitant ainsi la résolution de nombreuses questions.

Rappelons que le candidat a grand intérêt à lire le sujet intégralement avant de commencer à le traiter et à faire preuve de perspicacité pendant cette lecture.

Il est regrettable qu'une partie non négligeable des candidats fassent preuve d'un manque de rigueur sur des questions élémentaires comme le calcul de la somme d'une série géométrique, ou celui de la dérivée d'une fraction rationnelle. Il est d'ailleurs étonnant de constater beaucoup plus d'erreurs dans les dérivations de fonctions usuelles simples que dans les calculs (parfois complexes) de séries entières.

Les correcteurs ont apprécié les efforts faits par une grande partie des candidats dans leur rédaction. Il faut maintenir celui-ci en continuant non seulement à énoncer entièrement les théorèmes mais en vérifiant aussi toutes leurs hypothèses. Il faut également être clair et précis dans sa rédaction et ne pas omettre de quantificateurs aux passages cruciaux des démonstrations. Entre autres, il est important de bien mettre en évidence les points clés d'une démonstration (nom d'un théorème, hypothèse importante utilisée, etc), en les entourant par exemple. C'est plus important que d'entourer la solution elle-même (que le correcteur connait) et cela détermine pour le correcteur la compréhension ou non de la question par le candidat. Dans le même ordre d'idée, lorsque les candidats utilisent les résultats des questions précédentes, il faut les mentionner proprement.

Concernant la présentation des copies, le nombre de copies très mal écrites, est heureusement en diminution. Il faut absolument que les candidats aient en mémoire que la copie est un endroit où l'on rend un résultat propre, abouti, réfléchi et rédigé. Ce n'est pas une feuille de brouillon ! Nous avons encore tenu compte cette année de la présentation dans la notation.

Concernant la stratégie, c'est en faisant avec soin les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on gagne réellement des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. On peut dire sans exagérer qu'environ 75% des candidats font le même lot de questions, avec plus ou moins de bonheur. Les candidats qui font vraiment la différence sont ceux qui font deux ou trois questions plus difficiles, plus longues, où il y a un raisonnement en 2 ou 3 étapes à faire.

La qualité de la présentation et de la rédaction était notée sur 1,7 points. Passons maintenant au détail, question par question.

# I – Première partie

Cette première partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 5,1 points.

**1.** La plupart des candidats ont plutôt bien traité cette première question, sauf en ce qui concerne la justification de la continuité de $\phi$ en 0. En effet, trop d'entre eux ont montré que $\phi$ avait une limite en 0 et ont indiqué qu'il suffisait de la prolonger en 0 par cette limite pour qu'elle soit continue en 0. Or $\phi$ est déjà définie en 0 ! Il n'est donc pas possible de la prolonger et il fallait donc vérifier que la limite de $\phi$ en 0 était égale à $\phi(0)$.

**2.** Cette question a été d'une difficulté inattendue. Très peu de candidats ont montré avec succès ne serait-ce que l'une des trois propriétés demandées. Même le caractère borné a donné lieu à de graves confusions, puisque dans certaines copies, la partie $\Sigma_N$ est par exemple devenue une sphère.

**3.** La quasi-totalité des candidats a abordé cette question. Beaucoup l'ont résolu correctement mais trop d'entre eux n'ont pas finalisé la simplification de leur résultat.

**4.a)** Première question à avoir posé des difficultés aux candidats puisqu'au final très peu d'entre eux ont prouvé l'inégalité demandée alors qu'une simple étude de fonction, par exemple, était suffisant.

**4.b)** L'existence du maximum découlait directement du caractère fermé borné de la partie $\Sigma_N$ et de la continuité de $H_N$ sur celle-ci ; pourtant, seule une très petite partie des copies l'on remarqué. Beaucoup de candidats ayant trouvé les coordonnées du maximum, n'ont pas calculé la valeur de celui-ci alors que celle-ci était explicitement demandée.

**5.a)** Le calcul de $H_\infty$ a été tenté dans beaucoup de copies mais avec un succès variable. De même le calcul de la dérivée de $H_\infty$ a mis en difficulté trop de candidats.

**5.b)** Les candidats ayant utilisé l'indication ont généralement réussi cette question. Il sont très peu nombreux. Par contre, beaucoup de copies ont proposé d'autres séries, de terme général plus simple, pour tenter de répondre à la question mais systématiquement sans succès. Si le sujet propose une indication, c'est que vraisemblablement les séries classiques (typiquement harmonique, géométrique ou de Riemann) ne conviennent pas.

**6.** Cette première question de probabilité n'a pas eu beaucoup de succès alors qu'il s'agissait d'une application directe d'un théorème du programme, la clef étant de voir $H_N(p)$ comme l'espérance d'une variable aléatoire.

# II – Deuxième partie

Cette deuxième partie, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 5,6 points.

**7.** Trop de candidats sont partis dans des justifications complexes et incorrectes alors qu'il suffisait d'observer que la fonction $J$ est continue sur un fermé borné.

**8.a)** De bonnes idées ont été proposées mais trop peu ont été associées à une preuve formelle du résultat. Il ne suffit pas de donner vaguement une justification !

**8.b)** L'idée du raisonnement par l'absurde a été trouvée par beaucoup de candidats. Une très grande partie d'entre eux ont dû admettre la question précédente.

**9.a)** Il est stupéfiant de trouver des candidats qui se trompent soit dans la vérification du fait que $E_0$ est un sous-espace vectoriel, soit qui affirment que sa dimension est $n$ ! La détermination de l'orthogonal de $E_0$ a été bien faite dans beaucoup de copies.

**9.b)** Là encore l'idée n'était pas très compliquée. Par contre il ne fallait pas oublier que les coordonnées de $\tilde{p}(t)$ devaient être comprises en 0 et 1, ce qui aboutissait à la détermination de $\epsilon$. Un candidat qui parvient à montrer le résultat quelque soit $\epsilon$, ne devrait-il pas s'interroger ? Le calcul de la dérivée a été mené dans de nombreuses copies.

**9.c)** La première partie de la question n'a été que très peu traitée. La seconde partie a eu plus de succès auprès des candidats et bon nombre d'entre eux ont fait le lien avec l'orthogonal de $E_0$, ce qui permettait d'obtenir la relation recherchée.

**10.** L'identification de $\Sigma_N(f)$ a été un fiasco sauf dans de très rares cas qui ont montré que $\Sigma_N(f)$ était réduit à un seul point à l'aide **(9.c)**. Des candidats sont toutefois parvenus à un résultat intermédiaire sous la forme d'une droite solution à l'aide de **(9.c)** mais n'ont pas pensé à utiliser la contrainte sur la somme des $p_i$ pour aboutir au résultat final. Le calcul de $J_*$ a été réussi dans plus de copies.

**11.** La justification de la dérivabilité de $F$ a été faite par beaucoup de candidats qui ont eu un succès variable avec le calcul de cette dérivée. La réécriture de la dérivée sous la forme demandée n'a été faite que par très peu de candidats.

**12.** La limite en 0 a été trouvée par beaucoup mais justifiée par trop peu. Le correcteur souhaite que le candidat justifie la valeur de la limite qu'il propose et ne se borne pas à simplement donner celle-ci ! En ce qui concerne la limite en $+\infty$, la valeur fausse de 0, a été la proposition la plus fréquemment faite.

# III – Troisième partie

La troisième et dernière partie n'a été traitée, même partiellement, que par une fraction infime des candidats. Et une fraction encore plus infime y a obtenu des points. Cette partie III, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 7,6 points.

**13.** Il s'agissait de vérifier les assertions de l'énoncé, ce à quoi s'est essayée la grande majorité des candidats. Une application du théorème de transfert montrait que $A_{lk}$ était l'espérance indiquée. La symétrie de la matrice devenait alors évidente. La positivité n'a été trouvée que par une infime partie des candidats qui ont su réécrire $\theta^T A\theta$ sous la forme d'une somme de carrés.

**14.a)** Une très petite partie des copies propose une solution à cette question qui est généralement incorrecte.

**14.b)** Là encore, une très petite partie des copies propose une solution à cette question qui est généralement incorrecte.

**15.** Une bonne partie des candidats a été tentée par la justification de la régularité de $L$ et le calcul de son gradient. Une justification complète n'a été proposée que par très peu de candidats qui ont su, entre autres, justifier la régularité de $f$ en observant que $f$ est linéaire ($f(\theta) = M\theta$).

**16.** Traitée par très peu de candidats.

**17.** La justification de la classe $\mathcal{C}^2$ de $L$ a été faite par quelques candidats, par contre le calcul explicite des dérivées secondes n'a été mené que par une faible partie d'entre eux.

**18.a)** De très rares propositions de réponses.

**18.b)** Quelques candidats ont proposé une solution correcte à cette question en admettant les réponses aux précédentes.

**19.a)** Une infime partie des candidats a abordé la question.

**19.b)** À nouveau, une infime partie des candidats a abordé la question.