ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2001 **FILIÈRE PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

$\star\star\star$

Les propriétés démontrées dans ce problème ont des applications à la mécanique classique et quantique et à l'optique géométrique.

$\star\star\star$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on désigne par $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices réelles à p lignes et p colonnes, et l'on désigne par I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p$. Si $M \in \mathcal{M}_p$, on note $\underline{M}$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^p$ de matrice M dans la base canonique. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire canonique et $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^p$.

Pour tout entier pair $n = 2m$, on considère la matrice $J \in \mathcal{M}_{2m}$ définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} .$$

Première partie
Matrices symplectiques

1. On fixe l'entier pair $n = 2m$. On appelle *matrice symplectique* toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2m}$ telle que

$${}^tM\, J\, M = J .$$

a) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice symplectique ?

b) L'ensemble des matrices symplectiques est-il un groupe pour la multiplication ?

c) La matrice J est-elle symplectique ?

d) La transposée d'une matrice symplectique est-elle symplectique ?

2. On écrit toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2m}$ par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A, B, C, D \in \mathcal{M}_m$.

a) Montrer que la matrice M est symplectique si et seulement si les matrices A, B, C, D vérifient les conditions

$$\begin{cases} {}^tAC \quad \text{et} \quad {}^tBD \quad \text{sont symétriques ,} \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m \ . \end{cases}$$

b) Montrer que si D est inversible, il existe $Q \in \mathcal{M}_m$ telle que $M = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$.

En déduire que, si M est symplectique et D inversible, alors $\det M = 1$.

c) Soient $B, D \in \mathcal{M}_m$ telles que ${}^tBD$ est symétrique. On suppose qu'il existe $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$, $s_1 \neq s_2$, et $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^m$ tels que $(\underline{D} - s_1\underline{B})v_1 = 0$ et $(\underline{D} - s_2\underline{B})v_2 = 0$. Montrer que le produit scalaire $(\underline{D}v_1 \,|\, \underline{D}v_2)$ est nul.

d) On suppose que M est symplectique. Montrer que tout $v \in \mathbf{R}^m$ tel que $\underline{D}v = 0$ et $\underline{B}v = 0$ est nul. Montrer qu'il existe $s \in \mathbf{R}$ tel que $D - sB$ est inversible. En déduire que $\det M = 1$. [On pourra introduire la matrice $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}$ et vérifier qu'elle est symplectique.]

3. Soit M une matrice symplectique et soit P son polynôme caractéristique.

a) Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbf{C},\ \lambda \neq 0,\ P(\lambda) = \lambda^{2m} P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

b) Montrer que si $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ est valeur propre de M, de multiplicité d, alors $\dfrac{1}{\lambda_0}$, $\overline{\lambda}_0$, $\dfrac{1}{\overline{\lambda}_0}$ sont valeurs propres de M, chacune de multiplicité d.

c) Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de -1 et de 1 ?

d) On suppose dans cette question que $m = 2$. Donner des exemples de matrices symplectiques $\in \mathcal{M}_4$, diagonalisables sur $\mathbf{C}$ et ayant

(1) une seule valeur propre ;

(2) deux valeurs propres doubles distinctes ;

(3) une valeur propre double et deux valeurs propres simples ;

(4) quatre valeurs propres distinctes non réelles et de module $\neq 1$.

Dans chaque cas, dessiner les valeurs propres dans le plan complexe, sur lequel on tracera d'abord le cercle de centre 0 et de rayon 1.

e) Toute matrice symplectique est-elle diagonalisable sur $\mathbf{C}$?

Deuxième partie
Formes symplectiques et endomorphismes symplectiques

Soit n un entier $\geqslant 1$. On appelle *forme symplectique* sur $\mathbf{R}^n$ une application $\omega : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ qui est

- bilinéaire : $\forall y \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n \mapsto \omega(x,y) \in \mathbf{R}$ est linéaire et $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n \mapsto \omega(x,y) \in \mathbf{R}$ est linéaire ;
- antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \omega(x,y) = -\omega(y,x)$;
- non dégénérée : la condition « $\omega(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ » implique $x = 0$.

4.a) Soit η un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que

$$\eta^* = -\eta$$

où η^* est l'adjoint de η par rapport au produit scalaire euclidien. On pose

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \quad , \quad \omega(x,y) = (\eta(x) \,|\, y)\ . \tag{1}$$

Montrer que ω est une forme symplectique sur $\mathbf{R}^n$ si et seulement si η est inversible.

b) Soit ω une forme symplectique sur $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un endomorphisme η de $\mathbf{R}^n$ tel que la relation (1) soit vérifiée. Montrer que $\eta^* = -\eta$ et que η est inversible.

5. Montrer que s'il existe sur $\mathbf{R}^n$ une forme symplectique, alors n est pair.

6. On suppose dans cette question que $n = 2m$. On pose

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^{2m} \quad , \quad \omega_0(x,y) = (\underline{J}x \,|\, y)\ .$$

a) Montrer que ω_0 est une forme symplectique sur $\mathbf{R}^{2m}$.

b) Soit $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant 2m}$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2m}$. Calculer $\omega_0(e_k, e_\ell),\ 1 \leqslant k \leqslant 2m, 1 \leqslant \ell \leqslant 2m$.

c) Soit φ un endomorphisme de $\mathbf{R}^{2m}$, et M sa matrice dans la base canonique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^{2m}$, $\omega_0\Big(\varphi(x), \varphi(y)\Big) = \omega_0(x,y)$,

(ii) la matrice M est symplectique.

Un endomorphisme de $\mathbf{R}^{2m}$ qui vérifie la propriété (i) ci-dessus est appelé *endomorphisme symplectique.*

7. Un endomorphisme φ de $\mathbf{R}^n$ est dit *stable* si, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, la suite $\Big(\|\varphi^p(x)\|\Big)_{p\in\mathbf{N}}$ est bornée, où φ^p désigne la composée de l'application φ avec elle-même p fois.

a) Montrer que si un endomorphisme φ de $\mathbf{R}^n$ a toutes ses valeurs propres distinctes et de module 1 dans $\mathbf{C}$, alors φ est stable.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}_m$ pour que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2m}$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique soit symplectique et stable.

c) Montrer que si un endomorphisme symplectique φ de $\mathbf{R}^{2m}$ possède une valeur propre dans $\mathbf{C}$ de module $\neq 1$, alors φ n'est pas stable.

8. On note $x_1, \dots, x_{2m}$ les coordonnées de $x \in \mathbf{R}^{2m}$ dans la base canonique. On considère les ensembles $B = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \,\big|\, \sum_{k=1}^{2m} (x_k)^2 \leqslant 1\}$,

$$C_R = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2\} \quad \text{et} \quad \Gamma_R = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \,\big|\, x_1^2 + x_{m+1}^2 \leqslant R^2\} ,$$

où R est un réel strictement positif.

a) On suppose $m \geqslant 2$. Montrer que pour tout $R > 0$, il existe un endomorphisme symplectique φ de $\mathbf{R}^{2m}$ tel que $\varphi(B) \subset C_R$.

b) Soit φ un endomorphisme symplectique de $\mathbf{R}^{2m}$ et soit φ^* l'adjoint de φ par rapport au produit scalaire euclidien. Montrer que ou bien $\|\varphi^*(e_1)\| \geqslant 1$, ou bien $\|\varphi^*(e_{m+1})\| \geqslant 1$.

En déduire que, si $R < 1$, il n'existe aucun endomorphisme symplectique φ de $\mathbf{R}^{2m}$ tel que $\varphi(B) \subset \Gamma_R$.

* *
*

Rapport de Mme Thérèse MERLIER et M. Emmanuel GERMAIN, correcteurs.

Appréciation générale

Ce sujet classique d'étude des matrices symplectiques sans réelles questions difficiles (sauf peut-être **I.2.d, I.3.c** et **II.8**) a surtout été le révélateur des lacunes d'une majorité des candidats en algèbre linéaire qu'on retrouvera dans l'analyse question par question.

Les bonnes copies sont majoritairement celles des étudiants suffisament rapides pour aborder un grand nombre de questions : les nombreux petits calculs de la première partie (**I.1.b, I.1.d, I.2.b, I.2.c, I.3.a, I.3.d**) et les questions un tout petit peu plus conceptuelles de la **deuxième partie**. Notons cependant que les subtilités du travail à la fois sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (les matrices sont réelles, mais leur diagonalisation a lieu dans $\mathbb{C}$) n'ont pas été vues (cf. **I.3.b, II.7.a**).

D'une façon générale, deux reproches peuvent être faits aux candidats :

– celui de ne pas lire d'assez près le texte (par exemple en **II.7.c** où les candidats redémontrent que l'inverse d'une valeur propre est encore une valeur propre). Cela ne les pénalise pas en points, mais en temps perdu.

– celui de ne pas maîtriser la technique du raisonnement par condition nécessaire et suffisante. Cela est flagrant dans les questions **I.2.a** et **II.6.c**.

Statistiques

Sur les 1279 copies des candidats français la moyenne s'établit à 10,0 et l'écart-type à 3,7 : une note inférieure à 2/20 a été attribuée six fois, et 11 copies ont obtenu 20/20.

$0 \leq N < 4$	4%
$4 \leq N < 8$	28%
$8 \leq N < 12$	39%
$12 \leq N \leq 16$	22%
$16 \leq N \leq 20$	7 %

Analyse question par question

Première Partie

1.a) Les correcteurs ont été implacables pour les candidats simplifiant par det J sans vérifier que J était inversible. La **première question** se doit d'être impeccable.

1.b) Une majorité de candidats ne vérifie pas tous les axiomes des sous-groupes. Bien sûr l'inverse demandait déjà une petite réflexion.

1.c) Rien à dire.

1.d) Question ouverte et très liée à la question **1.b** que les bons candidats ont su faire. Par contre les correcteurs sont restés perplexes devant l'affirmation suivante : « le déterminant de M est de module 1, donc M est orthogonale ». A voir en relation avec la question **7.b**.

2.a) Rien à dire.

2.b) Pour réussir cette question, il fallait connaître le calcul par blocs du produit matriciel (que la question précédente avait introduit) et surtout du déterminant.

2.c) Un quatrième calcul qui, bien pris, est facile.

2.d) Le début et la fin de la question sont faciles et ont été vus par les bons candidats. La question difficile de ce problème (l'existence d'une valeur s telle que $D - sB$ soit inversible) qui demandait à la fois un petit raisonnement, l'utilisation de **2.c** et des connaissances de cours sur les familles orthogonales de vecteurs a quand même été résolue par une quinzaine de candidats.

3.a) Encore un calcul astucieux. Disons aux candidats qui n'ont pas su trouver l'angle d'attaque de la question qu'il est inutile de faire des considérations vaseuses pour, par miracle, trouver le résultat.

3.b) On pouvait penser que ce type de question, qui ressemble beaucoup à une question d'oral, serait bien traité. Beaucoup semblent penser qu'un polynôme (dont on ne dit rien de ses coefficients) a toujours des paires de racines conjuguées. Quant au calcul de la multiplicité de la racine $1/\lambda$, plusieurs méthodes étaient possibles, notamment par dérivation, pour ceux qui ne sont pas familiers avec l'algèbre des polynômes. Mais bien peu ont vérifié que la multiplicité était non seulement au moins supérieure à celle de λ mais en fait égale.

3.c) Les rapports entre racines du polynôme caractéristique et valeurs propres étant mal maîtrisés, cette question n'a quasiment jamais été traitée. Bien sûr, on ne donnait pas la réponse. Néanmoins l'analyse du déterminant, dont les premières questions avaient établi la valeur, donnait rapidement une réponse pour la multiplicité de -1.

3.d) Cette question n'était pas si facile, elle demandait une connaissance, non plus théorique, mais pratique des matrices et la faculté de chercher des exemples. Les meilleurs ont su produire les 3 premières matrices, mais un seul a donné la dernière.

3.e) Question ouverte mais facile puisque que l'indication de la question **2.d** mettait le candidat en face d'un contre-exemple. Là encore, le manque de familiarité avec la diagonalisation a entraîné la quasi absence de solution.

Deuxième Partie

4.a) Une bonne rédaction a été exigée par les correcteurs. On ne peut pas se contenter de dire (ou sous-entendre) que l'inversibilité est équivalente à la nullité du noyau sans clairement dire que l'application linéaire considérée est un endomorphisme entre espaces de dimension finie.

4.b) Cette question, un peu plus difficile, pouvait se résoudre soit matriciellement, soit en posant une formule pour l'endomorphisme η, soit enfin en imitant la démonstration de la représentabilité des formes quadratiques par un produit scalaire, ce qui a été fait correctement par les bons candidats.

5. Question vraiment classique. D'ailleurs certains candidats ont essayé, sans succès, de se souvenir d'une preuve. Là encore, les bons candidats ont su tirer leur épingle du jeu.

6.a) Première d'une suite de trois questions triviales qui a pénalisé, à juste titre, les candidats qui ont perdu du temps à refaire les calculs de **4.a**.

6.b) Question triviale, mais où il faut rester attentif. Au final, le nombre de réponses correctes est très insuffisant. On sent déjà que le problème a épuisé les candidats arrivés jusque là.

6.c) Facile à condition de mettre en évidence le passage d'une égalité du type « $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (Tx|y) = 0$ » à « $T = 0$ ».

7.a) Cette question n'est pas complètement évidente et les approximations des candidats en ont rendu la correction difficile. D'abord si presque tous les candidats ont su dire que l'application φ était diagonalisable, trop souvent il a été rajouté « dans une base orthonormale ». Ensuite, la diagonalisation ayant lieu dans $\mathbb{C}$ et non dans $\mathbb{R}$, des précautions d'écriture devaient être prises (utiliser par exemple un produit scalaire hermitien). Enfin si on avait le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$ (beaucoup ont paru sous-entendre que $\|x\|$ voulait dire norme euclidienne), il est indispensable de rappeler que toutes sont équivalentes. Par ailleurs les différences entre normes de vecteurs et normes de matrices (ou d'applications linéaires) ne sont pas assimilées.

7.b) Même les bons candidats qui ont eu le temps d'attaquer cette question ont paru ignorer qu'une matrice orthogonale conservait la norme euclidienne (ou avait des valeurs propres de module 1).

7.c) Cette question a été relativement bien traitée.

8. A part **8.a** que quelques candidats ont résolue, car très semblable en fait à **3.d**, le reste a été ignoré, et avec raison car il s'agissait de questions un peu difficiles.

Une note maximale s'obtenait aisément en ne traitant que la première partie.