Composition de Mathématiques B, Filière MP (X)

Présentation du sujet

Cette année le sujet portait sur un problème d'optimisation en dimension finie, plus précisément dans l'espace des polynômes réels à une variable de degré inférieur ou égal à un entier fixé N. Il s'agissait de minimiser la forme linéaire L définie par

$$L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x$$

sur le sous-ensemble A_N convexe formé des polynômes P positifs sur $[-1, 1]$ dont les valeurs en 1 et -1 sont fixées et égales à 1. Le degré des polynômes ne pouvant être choisi arbitrairement grand, la borne inférieure des valeurs prises par la forme linéaire sur A_N n'est pas nulle a priori.

Le sujet débutait par des questions préliminaires étudiant la topologie de l'ensemble A_N ainsi que l'ensemble des minimiseurs de L sur A_N. Ces premières questions aboutissaient à l'existence d'un polynôme pair, à priori non unique, parmi ces minimiseurs. Ces questions préliminaires permettaient de tester la maîtrise des notions de base des candidats en topologie.

La première partie du problème, très classique, introduisait les polynômes orthogonaux de Legendre renormalisés de sorte que leur valeur en 1 soit égale à 1. Il y était démontré que cette famille est une base orthogonale de l'espace des polynômes qui se scinde explicitement en des bases respectives des sous-espaces formés par les polynômes pairs et les polynômes impairs. La famille n'étant pas orthonormée, on y calculait explicitement la norme issue du produit scalaire usuel sur $L^2([-1, 1])$ des polynômes de Legendre. Cette première partie avait pour objectif d'évaluer la maîtrise technique des candidats, plusieurs questions faisant intervenir des calculs impressionnants de prime abord, mais dont l'exécution bien menée se révélait aisée.

Le seconde partie du problème visait à étudier les racines d'un minimiseur pair de L sur A_N. Il y était démontré que toutes les racines d'un tel minimiseur sont situées dans l'intervalle $[-1, 1]$. À partir de sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$, on montrait successivement que l'on pouvait remplacer par 0 les racines imaginaires pures, les racines réelles hors de $[-1, 1]$ et par un réel de $[-1, 1]$ chaque racine complexe non réelle et non imaginaire pure, et ce sans changer le caractère minimisant du polynôme obtenu.

La première question de cette partie testait les connaissances algébriques des candidats sur les polynômes réels, la suite de la partie faisait intervenir leurs connaissances sur la géométrie des nombres complexes.

La troisième et dernière partie du problème commençait par la démonstration du fait que le minimiseur obtenu par réduction des racines dans la seconde partie est le carré d'un polynôme. Cela permet de ramener le problème initial de minimisation en norme L^1 à un problème de minimisation en norme L^2, ce qui octroie l'usage des techniques hilbertiennes pour la résolution du problème étudié. Ce passage d'un minimiseur L^1 à un minimiseur L^2 est ici lié au fait que l'on étudie un problème d'optimisation dans l'espace des polynômes de degré au plus N, ce qui rajoute des contraintes algébriques aux contraintes analytiques explicitées dans l'énoncé. L'usage de l'orthogonalité et de la base des polynômes de Legendre permettait d'obtenir une formule explicite pour le minimum recherché en fonction des normes L^2 des polynômes de Legendre. Cette norme ayant été calculée dans la première partie, on en déduisait la valeur du minimum de L sur A_N, puis une formule explicite pour le minimiseur pair obtenu à la deuxième partie.

Conseils généraux pour les candidates et candidats

Le sujet de l'épreuve de Mathématiques - B de cette année portait sur de nombreux points du programme de la filière MP, la plupart étant d'ailleurs déjà vus en classe de MPSI.

Les questions préliminaires nécessitaient une bonne maîtrise des notions de topologie des espaces vectoriels normés en dimension finie. À ce titre, il est assez inquiétant de constater qu'une part non négligeable des candidats ne connaît pas parfaitement la définition d'une norme. À cela s'ajoute le fait que la notion de convergence ne semble pas être liée au choix d'une norme pour près des deux tiers des candidats. Bien entendu en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, mais il est important que les élèves de classes préparatoires, particulièrement en filière MP, aient compris qu'il s'agit d'une particularité de la dimension finie. Ainsi, pour montrer le caractère fermé d'un ensemble, il est attendu que les candidats travaillent avec la norme de l'énoncé ou qu'ils invoquent clairement l'équivalence des normes en dimension finie. Toujours autour de cette notion de fermeture, s'il est bien de savoir que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé, encore faut-il ne pas utiliser à tort et à travers ce critère en se trompant dans l'écriture d'un ensemble donné comme image réciproque d'un autre ensemble.

La première partie visait à tester les compétences calculatoires des candidats, aussi bien dans la manipulation algébrique des sommes pour les trois premières questions que dans l'usage de l'intégration par partie pour les questions 4 et 5. Il est intéressant de voir que les candidats qui ont réussi à mener à bien les calculs de cette partie, en particulier aux questions 4 et 5, sont ceux qui ont globalement bien réussi l'épreuve. S'il est de bon ton de regarder de haut les questions dites calculatoires et de penser qu'elles ne sont pas aussi intéressantes que d'autres, il est important de rappeler aux candidats qu'une bonne maîtrise technique en analyse comme en algèbre est indispensable pour songer à aborder des questions mathématiques dites "intéressantes". Pour aller plus loin dans cette idée, rappelons-nous que la plupart des théories mathématiques ont été conçues pour mener à bien des calculs qui ne pouvaient se faire à une époque donnée.

La deuxième partie du problème mettait en jeu des compétences plus algébriques et géométriques, le tout mélangé avec un peu d'analyse. Nous avons été agréablement surpris par le taux de réussite à la question 7 qui demandait une bonne maîtrise de la factorisation des polynômes selon leur racines. Plus inquiétant est le taux de réussite à la question 10a, pourtant élémentaire. Nous pensons que l'abandon progressif de la géométrie et en particulier de l'usage des nombres complexes en géométrie au lycée et dans une moindre mesure en classes préparatoires se fait sentir ici. Près de 70% des candidats ne savent pas écrire proprement l'équation d'un cercle à partir d'une relation simple sur les modules de nombres complexes. Quand bien même il parviennent à démarrer leur calcul en passant en coordonnées cartésiennes, de trop nombreux candidats ne savent pas regrouper les termes de leur équation pour retrouver l'équation d'un cercle sous forme canonique. Ce type de calculs sont à la base des formules donnant les racines d'un trinôme et il est étonnant de voir que ceux-ci ne sont toujours pas maîtrisés quatre ans après avoir vu ces formules en classe de première.
Par ailleurs, la question 10 dans cette partie portait essentiellement sur des arguments de géométrie dans le plan complexe. Or très peu de candidats ont le réflexe, pourtant essentiel en géométrie, de faire un dessin de la situation rencontrée. Il est possible en un clin d'oeil pour un correcteur, à l'aide d'un dessin bien réalisé, de voir si un candidat a compris la question et sait la résoudre. Nous le répétons depuis plusieurs années : aussi bien pour des questions d'analyse, de géométrie ou de topologie, que pour résoudre un problème de mathématique plus complet, et nous le voyons dans notre pratique quotidienne de la recherche, il est nécessaire de faire des dessins.

La troisième et dernière partie faisait la part belle aux méthodes hilbertiennes. Seuls les bons candidats sont parvenus jusqu'à cette partie, ceux qui ont donc abordé ces questions ont globalement montré une assez bonne maîtrise de ces méthodes.

Indications sur le barème et statistiques générales

Les résultats de l'épreuve sont en accord avec les directives statistiques générales du concours, ce qui garantit l'influence respective des différentes épreuves.

Nombre de copies :	1727
Note moyenne :	10.13
Écart-type :	4.51
Coefficient de variation :	44.5%

L'histogramme de répartition des notes est représenté sur la figure 1. L'histogramme cumule les candidats français et étrangers.

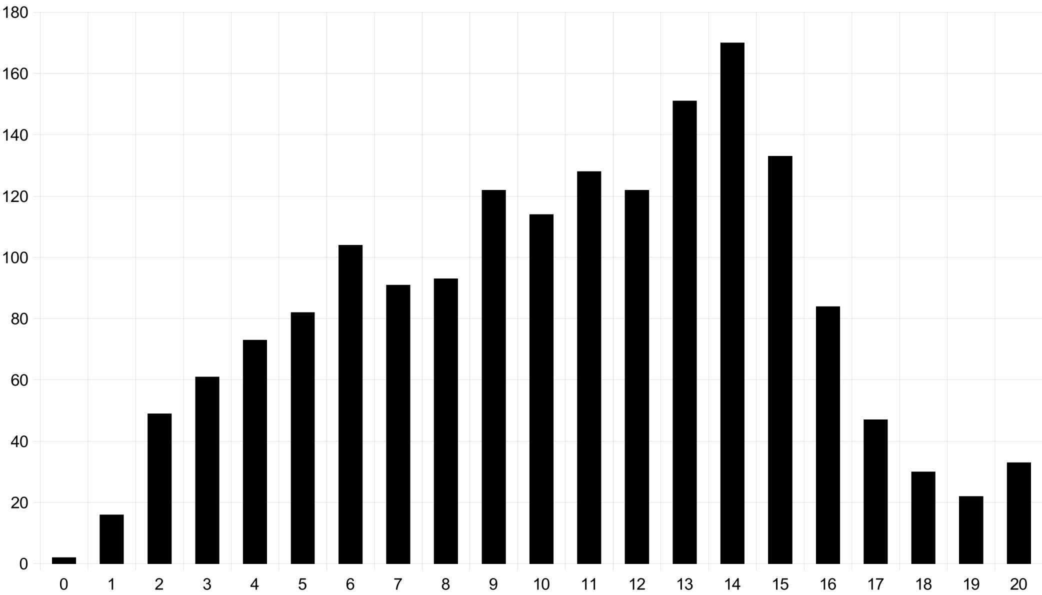

Fig.1 – En abscisse la note et en ordonnée le nombre de candidats ayant obtenu cette note.

Les notes des 1354 candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant N < 4$	125	9,23 %
$4 \leqslant N < 8$	259	19,13 %
$8 \leqslant N < 12$	385	28,43 %
$12 \leqslant N < 16$	453	33,46 %
$16 \leqslant N \leqslant 20$	132	9,75 %
Total	1354	100 %
Nombre de candidats : 1354		
Note moyenne : 10,55		
Écart-type : 4,4		

Comme chaque année, le barème a été conçu selon trois objectifs : séparer les candidats dans la zone d'admissibilité, éviter les effets de seuil et minimiser les points de "grappillage".

Le tableau suivant indique la proportion de points attribués à chaque partie.

	Proportion dans le barème	Barème cumulé	Note sur 20 cumulée
Préliminaires	14%	14%	5.3
Partie 1	18%	32%	12.7
Partie 2	35%	67%	19
Partie 3	33%	100%	20

Notons que cette année la moyenne de cette épreuve est plus élevée de près de 2.5 points par rapport aux moyennes des années précédentes. Deux facteurs peuvent expliquer cette remontée.
Le premier tient à la nature particulière des conditions dans lesquelles s'est déroulée cette épreuve de Mathématiques - B. En effet, celle-ci a dû être reportée de près de deux semaines et près de 10% des candidats présents lors de la première semaine d'épreuves ne sont pas revenus composer. Lors de la correction des copies, nous avons constaté un nombre beaucoup moins important de copies très faibles que les autres années et très certainement les 10% de candidats présents en moins correspondent à ceux qui n'avaient pas réussi les autres épreuves du concours. Cet effet de moindre accumulation de notes très basses peut expliquer à lui seul en grande partie la remontée spectaculaire de la moyenne cette année.
Le second facteur est la longueur du sujet. Il est apparu qu'un plus grand nombre de candidats ont réussi cette année à traiter le sujet dans son intégralité, chose qui était devenue tout à fait exceptionnelle les années passées. Il est raisonnable de penser que ce sujet comportait aussi moins de questions très difficiles que les années passées. Toutefois, il a parfaitement permis de séparer les candidats admissibles des autres dans les mêmes conditions qu'habituellement. Le seul changement que ce second facteur induit est un plus grand nombre de copies dont la note est située entre 18 et 20 que les années passées.

Examen détaillé des questions

Ce qui suit n'est pas un corrigé de l'épreuve mais des commentaires question par question.

Questions préliminaires

Question 1a Dans cette question, réussie par 89% des candidats, il ne fallait pas oublier que l'ensemble A_N est défini par deux conditions, les valeurs en ± 1 du polynôme et sa positivité sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Question 1b De manière surprenante, seuls 73% des candidats ont obtenus les points à cette question pourtant élémentaire. Trop de candidats oublient l'une des conditions pour qu'une application d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans $\mathbf{R}_+$ soit une norme, souvent l'homogénéité.
En ce qui concerne le caractère défini de la norme $||\cdot||_1$, il fallait être attentif au fait que la positivité et la continuité d'une fonction dont l'intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle n'entraîne que sa nullité sur cet intervalle. Pour obtenir la nullité d'un polynôme P tel que $||P||_1 = 0$, on peut par exemple utiliser le fait qu'un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.
Enfin, il a été vu dans plusieurs copies une tentative de démontrer simultanément l'inégalité triangulaire et l'homogénéité en majorant la norme de $\lambda P + Q$ pour λ réel, P et Q deux polynômes. Si l'inégalité obtenue entraîne bien l'inégalité triangulaire pour $\lambda = 1$, elle n'entraîne pas l'homogénéité qui est une égalité.

Question 1c Dans cette question, il est essentiel d'invoquer l'équivalence des normes en dimension finie. Dans l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$, qui est de dimension infinie, il est faux que la convergence pour la norme $||\cdot||_1$ entraîne la convergence ponctuelle sur $[-1, 1]$, bien que de nombreux candidats utilisent cette "propriété"... Il se trouve que cela est vrai ici car on se restreint à l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ qui est de dimension finie mais cela doit être précisé clairement par les candidats pour obtenir les points à la question. On pouvait donc ramener la question de la fermeture pour la norme $||\cdot||_1$ à celle pour la norme $||\cdot||_\infty$ et utiliser le fait que les égalités et inégalités définissant A_N sont conservées par passage à la limite simple.

Question 2a Il s'agit là d'un résultat classique qui affirme qu'en dimension finie la distance à un fermé est atteinte. Cette question pouvait se résoudre de plusieurs façons, mais toutes utilisent un argument de compacité d'une boule fermée en dimension finie. Deux erreurs récurrentes ont été rencontrées. La première est celle qui consiste à affirmer que A_N est bornée donc compacte et qu'ainsi

L étant continue sur A_N elle atteint ses bornes. Bien entendu, A_N n'est pas bornée. La seconde erreur est plus grossière et consiste à affirmer qu'une application continue sur un fermé est bornée et atteint toujours ses bornes... Pour avoir contre-exemple, il suffit de songer à n'importe quelle fonction continue sur $\mathbf{R}$, qui est fermé dans lui-même ; par exemple, $f(x) = x$ n'est pas bornée sur $\mathbf{R}$ et $g(x) = \arctan(x)$ est borné mais n'atteint pas ses bornes.

Globalement, les questions $1c$ et $2a$ ne sont réussies seulement par 36% et 57% respectivement des candidats, ce qui dénote un manque de connaissance de trop nombreux candidats dans les raisonnements classiques de topologie en dimension finie.

Question 2b Si la convexité de B_N est presque toujours bien démontrée par les candidats, nombre d'entre eux butent sur sa compacité, en particulier en démontrant mal son caractère fermé. Il est faux que B_N est l'image réciproque du singleton $\{a_N\}$, mais c'est l'intersection de cette image réciproque avec A_N. B_N est donc fermé comme intersection de deux fermés ou comme fermé relatif de A_N lui-même fermé. Sur une telle question qui ne présente pas de difficulté technique, une rédaction irréprochable est attendue.

Question 2c En ayant lu le sujet jusqu'au bout avant de se lancer dans sa résolution, il était clair que l'on attendait pas à cette question un exemple explicite de polynôme pair dans B_N, celui-ci n'étant obtenu qu'à la toute dernière question du problème. Il suffisait ici de se donner un élément de B_N et de vérifier qua sa partie paire était encore dans B_N par convexité.

Première Partie

Question 3a Sur cette question simple, le résultat affirmé sans aucune justification ne rapportait aucun point. Il était possible d'obtenir le degré directement par dérivation j fois d'un polynôme de degré $2j$ pour $j \neq 0$ (et en traitant le cas $j = 0$ à part), ou alors en développant par le binôme de Newton puis en dérivant j fois et en identifiant le coefficient dominant. Comme pour les deux questions suivantes, une démonstration par récurrence était possible, mais bien plus fastidieuse.

Une façon efficace de procéder était d'utiliser le fait que $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ puis d'utiliser la formule de Leibniz. Cela conduit à une formule explicite des polynômes de Legendre qui permettait de répondre directement aux questions $3a$, $3b$ et $3c$.

Question 3b Il s'agit là d'utiliser un résultat général sur les fonctions dérivables qui s'applique bien entendu aux fonctions polynomiales : la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire. Le résultat découle alors du fait que $x \mapsto (x^2 - 1)^j$ est paire. Précisons que les "dérivations par rapport à $-X$" sans aucune justification de l'utilisation d'une dérivée composée ne rapportaient aucun point.

Question 3c D'après la question précédente, seule la valeur en 1 requiert un calcul détaillé qui pouvait se faire directement à l'aide de la formule de Leibniz. Aucun point n'était attribué pour la valeur en -1 à partir de celle en 1.

Question 4 Il s'agit là encore d'un calcul classique qu'il faut savoir bien mener. L'essentiel ici est de justifier proprement que tous les crochets d'intégrations qui apparaissent sont nuls, ce qui pouvait s'obtenir par exemple en utilisant le lien entre multiplicité d'une racine et polynômes dérivés.

Les démonstrations utilisant la parité des P_j en distinguant les cas de parité relative pour i et j avec deux indices distincts étaient difficiles à rédiger et finalement peu pertinentes, le résultat final ne dépendant nullement de la parité relative des deux indices.

Question 5a Le calcul est en tout point analogue à celui effectué à la question précédente si ce n'est que l'on effectue une intégration par partie de moins. Le résultat de cette question était essentiel pour obtenir la bonne valeur de g_j à la question $5c$. Cette question n'a été réussie que par 32% des candidats et la question précédente que par 29%, ce qui montre une certaine faiblesse technique d'au moins deux tiers des candidats.

Question 5b Ce calcul classique qui intervient aussi dans les intégrales de Wallis a été réussi par 53% des candidats.

Question 5c La valeur de I_j est obtenue par 38% des candidats qui savent utiliser la relation obtenue précédemment et les factorielles. La valeur de g_j n'est obtenue que par 16% des candidats, la question $5a$ n'étant que peu réussie.

Question 6a Sur cette question élémentaire il était essentiel d'être précis et d'invoquer l'égalité entre la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ (qui est $n+1$ et non pas n comme on le lit dans encore trop de copies...) et le cardinal de la famille libre considérée. On pouvait aussi démontrer à la main le caractère générateur, mais c'était plus long. La liberté découlait de l'orthogonalité de la famille ou de son caractère échelonné en degré. Invoquer simplement ce caractère échelonné sans parler du cardinal de la famille ne permettait pas d'obtenir les points à la question. Au final, cette question qui aurait due être réussie par tous les candidats ne l'est que par 79% d'entre eux.

Question 6b Plus difficile que la précédente cette question a été relativement mieux traitée que la précédente (62% de réussite) car les candidats l'ayant abordé ont compris qu'il fallait donner un argument complet utilisant les questions précédentes et le fait que l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose en somme directe des sous-espaces formés par les polynômes pairs et par les polynômes impairs. Il fallait prendre garde aux notations pour les dimensions des sous-espaces considérés, $\frac{n}{2}$ n'étant pas forcément entier, il fallait considérer sa partie entière ou distinguer les cas n pair et n impair.

Deuxième Partie

Question 7 Cette question purement algébrique a été plutôt bien réussie par les candidats : 42% ont obtenu tous les points et seuls 38% n'ont obtenu aucun point à cette question. Il s'agissait bien entendu d'utiliser le caractère scindé de tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et de classer les racines complexes selon qu'elles soient réelles, imaginaires pures ou ni l'un ni l'autre. La parité du polynôme permettait de les regrouper par paires de racines opposées, le caractère réel du polynôme permettait de regrouper toute racine complexe avec sa racine conjuguée.

Une difficulté de cette question tenait au fait que l'on n'utilisait pas toutes les hypothèses faites sur R_N. En effet, ni son caractère positif sur $[-1,1]$ ni son caractère minimisant pour L n'étaient utilisés.

Question 8 La positivité de $S_N(x)$ sur $[-1,1]$ pouvait être délicate à rédiger, le plus simple restant de dire que S_N et R_N ont le même signe sur $[-1,1]$ car changer un terme positif dans un produit par un autre terme positif ne change pas le signe global. Il fallait aussi faire attention au fait qu'a priori certain termes du premier produit pourraient changer de signe sur $[-1,1]$ mais le produit de ces termes doit être positif sur tout l'intervalle par positivité de R_N sur celui-ci. L'appartenance de S_N à l'ensemble des minimiseurs découle d'un argument de minimalité.

Question 9 Le principal écueil rencontré par les candidats dans cette question est de ne pas avoir toujours vu que l'on ne conserve que des termes qui ne s'annulent pas sur $[-1,1]$. Les inégalités demandées ne posaient donc aucun problème. L'appartenance de T_N à B_N découle du même argument de minimalité que précédemment. Cette question très similaire à la précédente nécessitait tout de même un minimum de précision dans sa rédaction, on ne pouvait se contenter d'un "comme à la question 8" laconique pour espérer avoir les points.

Question 10a Il est très inquiétant de constater que seuls 30% des candidats ont su démontrer proprement qu'il s'agissait là de l'équation d'un cercle dont on pouvait déterminer le centre et le rayon en fonction du λ introduit dans l'énoncé. Certes, un argument savant sur les homographies (hors programme) peut éviter des calculs semblant fastidieux, mais dans les faits, l'équation cartésienne du cercle s'obtenait directement en décomposant z en partie réelle et imaginaire. Le calcul se ramène alors à reconnaître le début du développement d'un carré.

Il était aussi possible de reconnaître une ligne de niveau classique ou la définition d'un cercle comme étant l'ensemble des points dont le rapport des distances à deux points fixés est constant.

Pour l'existence et l'unicité du point d'intersection avec $[-1, 1]$ il fallait bien justifier l'existence de ce point avant de le calculer ou alors de le calculer par analyse puis de ne pas oublier d'effectuer la synthèse où l'on montre que le point obtenu est bien sur le cercle et dans $[-1, 1]$. Ce type de raisonnement par analyse-synthèse semble connu de très peu de candidats (seulement 21% des candidats obtiennent les points à cette partie de la question).

Question 10b L'inégalité stricte provient du fait que le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire est exclu par les hypothèses faites sur w. Un dessin était appréciable pour la résolution de cette question. Trop peu de candidats ont le réflexe de faire un dessin de la situation lorsqu'ils tentent de résoudre un problème de géométrie.

Question 10c Le même type de calcul, avec plus de termes, permettait de caractériser le cercle définit par l'équation de l'énoncé. L'inégalité demandée était plus difficile à obtenir et relevait a priori d'une étude de fonction et d'un argument de continuité. Seuls 9% des candidats ont réussi à mener à bien cette démonstration.

Question 11 Il s'agissait sans doute de la question la plus difficile du problème car elle demandait aux candidats de faire preuve d'initiative. Tout d'abord, sur le modèle des questions 8 et 9, on pouvait construire en s'aidant de la question 10 un nouveau polynôme à partir de T_N dont chaque racine ni réelle ni imaginaire pure était remplacée par le réel y dans $[-1, 1]$ associé. Puis comme précédemment, on prouvait que ce nouveau polynôme était positif et majoré par T_N sur $[-1, 1]$, on en déduisait donc par minimalité qu'il appartenait à B_N. Enfin on montre que ce polynôme, dont toutes les racines sont réelles et dans $[-1, 1]$, est égal à R_N car R_N moins ce polynôme est positif sur $[-1, 1]$, continu et d'intégrale nulle sur cet intervalle puisque leurs intégrales respectives valent toutes deux a_N.

Troisième Partie

Question 12 Si la parité du degré de R_N est évidente, sa maximalité l'est moins et découle de l'appartenance à B_N de R_N. En effet, si R_N n'est pas de degré $2n$, il est de degré au plus $2n - 2$ et en considérant le polynôme $X^2 R_N$ on arrive à une contradiction sur la minimalité de R_N.

Question 13 Puisque R_N a toutes ses racines dans $]-1, 1[$ et qu'il est positif sur cet intervalle, ses racines doivent être de multiplicité paire (une multiplicité impaire implique un changement de signe sur l'intervalle). On en déduit que R_N est un carré. Attention, la seule positivité d'un polynôme sur un intervalle ne permet pas de définir la racine carré de celui-ci. C'est possible au niveau des fonctions polynomiales, mais rien n'assure que cette racine carrée est alors encore une fonction polynomiale.

Dans la deuxième partie de la question il ne suffisait pas de dire que $U_N(-1)$ valait plus ou moins 1 car son carré vaut 1, il fallait aussi s'assurer que ce signe change avec la parité de n introduit dans l'énoncé ce qui est une conséquence de la forme particulière de la factorisation de R_N. Enfin, pour justifier que U_N est soit pair soit impair, il fallait utiliser un argument d'intégrité de l'anneau des polynômes. La réponse à cette question était donnée dans la suite de l'énoncé, il était donc absurde de répondre que U_N n'est ni pair ni impair.

Question 14a Il était possible, comme l'on fait un certain nombre de candidats, de sauter les questions de 10 à 13 et de traiter directement cette question 14 plus classique puisque relevant des techniques hilbertiennes. Dans cette première sous-question, si la majoration de la norme L^2 de U_N par celle des P dans H_n a été bien réussie, il ne fallait toutefois pas oublier de vérifier que U_N appartient bien à H_n lui aussi pour avoir un minimum et non un infimum.

Question 14b L'indication de l'énoncé conduisait à développer le carré de la norme de $U_N + t(P_{2j} - P_{2k})$ et à utiliser le fait que sa dérivée en 0 est nulle d'après la question précédente. Il était aussi possible d'utiliser directement le théorème de la projection orthogonale dans un espace euclidien. Enfin, ce résultat est aussi une conséquence immédiate des extrema liés, résultat qui n'est par contre pas au programme.

Question 14c En utilisant la question précédente et la question 6b on obtient le développement de U_N dans la base des P_{2j} en fonction de μ et on évalue l'égalité obtenue en 1.

Question 14d En calculant alors la norme L^2 et en utilisant le théorème de Pythagore ainsi que le résultat de la question 14a, on obtient ce résultat.

Question 15 Une démonstration complète des résultats précédents dans le cas où U_N est impair n'était pas demandé, mais il fallait tout de même redonner les principales étapes en introduisant des notations analogues à celles de l'énoncé de la question 14 dans ce second cas. Une formule pour a_N donnée directement sans explication ne rapportait pas de point.

Question 16 En combinant la formule obtenue à la question 5c avec celles obtenues en 14d et 15, on pouvait effectuer un calcul direct d'une somme de termes d'entiers successifs. Il fallait faire attention aux indices de sommation pour ne pas se tromper dans la formule à obtenir, ce qui pouvait être compliqué en fin d'épreuve.

Question 17 Dans cette dernière question, on obtient enfin une formule explicite pour le polynôme dont on a prouvé l'existence à la question 2c. Les questions 16 et 17 n'ont été réussies que par 1% des candidats.