ÉCOLE POLYTECHNIQUE CONCOURS D'ADMISSION 2017
ENS : LYON, CACHAN, RENNES

Composition de Mathématiques A, Filière MP (XLCR)

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	157	10,28 %
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	614	40,21 %
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	571	37,39 %
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	161	10,54 %
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	24	1,57 %
Total	1527	100 %
Nombre de candidats : 1527		
Note moyenne : 8,02		
Écart-type : 3,34		

Présentation du sujet

Ce sujet portait sur l'étude de quelques propriétés des formes symplectiques sur des espaces vectoriels réels de dimensions finies à l'aide de leurs représentations matricielles, et s'intéressait tout particulièrement à la question de la réduction simultanée de deux telles formes. La première partie permettait d'établir une caractérisation des formes symplectiques, puis de prouver que toute forme symplectique pouvait être représentée par la matrice antidiagonale J_{2n} dans une base convenable et qu'elle domptait alors nécessairement au moins une structure complexe. La deuxième partie portait sur les polynômes ; elle invitait notamment à définir le discriminant d'un polynôme en une variable de degré quelconque puis montrait la densité du complémentaire des zéros d'un polynôme à plusieurs variables. L'application de ces résultats à l'étude des formes symplectiques n'apparaissait cependant qu'en fin de sujet. Dans la troisième partie, une forme symplectique était arbitrairement fixée, ce qui permettait de réduire l'étude des autres formes symplectiques à celle d'automorphismes de l'espace vectoriel, dont on étudiait alors la structure. La fin de cette partie visait à démontrer que sous certaines hypothèses peu contraignantes, il était toujours possible de décomposer l'espace vectoriel de base en somme de sous-espaces de dimension 2 ou 4 deux à deux orthogonaux pour une paire de formes symplectiques arbitrairement fixées. La quatrième partie consistait à étudier une condition analytique permettant d'affirmer l'existence d'une structure complexe simultanément domptée par deux formes symplectiques arbitrairement fixées.

Commentaires généraux

Ce sujet assez long comportait de nouvelles définitions basées sur des objets bien connus des candidats (applications bilinéaires sur des espaces vectoriels réels et matrices à coefficients réels) et n'ont généralement pas posé de grandes difficultés d'adaptation sur la première partie. La deuxième partie a globablement été peu et mal traitée : le lien entre les questions 10) et 11) n'a été proprement et complètement fait que dans peu de copies, tandis que la question 12), qui est classique mais difficile, n'a été bien traitée que dans de très rares copies se trouvant parmi les meilleures. L'une des principales difficultés de ce sujet consistait en la présence de plusieurs questions de synthèse, et ce dès la première partie, nécessitant une compréhension de l'enchaînement des questions. Ceci nous mène à rappeler l'importance de lire le sujet dans son intégralité avant de commencer la composition, ne serait-ce que pour repérer l'existence de questions plus accessibles dans les parties plus tardives (telles les premières questions de la troisième partie par exemple).

Nous rappelons par ailleurs que les recommandations contenues dans les rapports antérieurs restent souvent pertinentes d'une année sur l'autre. En particulier, nous insistons de nouveau sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que d'une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). Nous déplorons aussi un manque de soin général dans certaines copies, pouvant se révéler préjudiciable.

Rappelons enfin que la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté : ainsi, cibler uniquement les questions les plus élémentaires en espérant cumuler suffisamment de points est une stratégie ne pouvant évidemment mener à l'obtention d'une bonne note. De même, tenter de traiter un maximum de question sans rédiger correctement une réponse complète ne peut donner lieu non plus à de bons résultats : bien que la gestion du temps fasse partie des difficultés de l'épreuve, il est nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires.

Examen détaillé des questions

1) Cette question de cours a été assez inégalement traitée, alors que plusieurs preuves étaient tout à fait accessibles (recours à la base duale, comparaison avec les matrices colonnes à coefficients réels, etc.). Une affirmation de type « c'est du cours » ne constitue bien évidemment pas une démonstration recevable.

2) Il était nécessaire de mentionner la propriété d'anti-symétrie de la forme ω pour obtenir l'égalité recherchée.

3-a) Une question très classique mais néanmoins pas toujours bien traitée. En particulier, une grande partie des candidats n'a pas réussi à fournir une preuve correcte de l'unicité de la matrice recherchée : exhiber une matrice qui fonctionne ne suffit pas à conclure. La nécessité de l'unicité de cette matrice dans certaines questions de la suite du sujet (notamment en Partie III par exemple) a par ailleurs été souvent occultée, ce qui est dommage.

3-b) Là encore, l'égalité demandée pouvait être obtenue de plusieurs manières (utilisation de l'unicité de la question précédente ou calcul explicite de la matrice transposée) mais les rédactions proposées n'ont pas toujours été suffisamment soignées pour être convaincantes.

3-c) La comparaison de $A(E)$ à l'espace des matrices antisymétriques a été exploitée par une grande majorité des candidats, mais les questions précédentes n'assurent pas immédiatement l'existence d'une bijection entre les deux espaces, et un argument supplémentaire fourni par trop peu de candidats est nécessaire afin d'obtenir une preuve complète. Très peu de candidats ont pensé à identifier l'application déterminant qui apparaissait naturellement dans les calculs, c'est dommage.

3-d) Très peu de candidats ont essayé de démontrer l'équivalence deux à deux des trois assertions proposées, ce qui est une bonne chose. La preuve de l'implication $(\mathcal{E}_3) \Rightarrow (\mathcal{E}_1)$ a posé des difficultés dans une part non négligeable des copies, et le lien entre ω et φ_ω n'a pas toujours été bien compris.

4) Très peu de candidats ont pris l'initiative de considérer le déterminant de la matrice d'une forme symplectique afin de répondre à cette question à l'aide du résultat de la question 3-b), qui a par suite été très discriminante.

5) Trop de candidats ont omis de vérifier que ω_0 était effectivement une forme bilinéaire alternée, condition nécessaire à l'application du résultat de la question 3-d).

6) Il s'agissait de fournir un changement de base adéquat et suffisamment explicite, ce qui a été correctement fait dans l'ensemble, bien que certains candidats compliquent artificiellement leur réponse en s'imposant de multiplier les deux vecteurs de base par le même scalaire.

7-a) Cette question de cours a été globalement bien traitée par utilisation d'un supplémentaire de E dans F. Rappelons cependant que si un espace vectoriel E est somme directe de deux sous-espaces vectoriels (disons $E = F \oplus G$), dire qu'un élément n'appartient pas à F n'implique certainement pas qu'il appartient à G : il suffit de penser à la décomposition en somme directe de $\mathbb{R}^2$ en deux droites distinctes passant toutes deux par l'origine pour s'en convaincre. Par suite, définir $\tilde{u}$ sur les éléments de F puis sur ceux de son complémentaire a toujours mené à des erreurs.

7-b) La rédaction de la preuve de cette équivalence était dans l'ensemble assez décevante. En particulier, encore trop de candidats confondent $\emptyset$ et $\{0\}$, ainsi que raisonnement par équivalence et raisonnement par double implication.

7-c) La détermination de l'image de ψ_F a posé des difficultés à une partie des candidats, et deviner que ψ_F était égal à F^* (et non à F comme cela fut proposé dans certaines copies) ne suffisait pas : il fallait exploiter le résultat de la question 7-a) pour conclure à l'inclusion de F^* dans F, l'autre inclusion étant vraie par définition de F.

7-d) L'utilisation d'un théorème dans une preuve doit être précisée : ici, il fallait donc explicitement mentionner l'utilisation du théorème du rang pour pouvoir conclure correctement, ce qui n'a pas été fait par une partie non négligeable des candidats.

7-e) La rédaction de la réponse à cette question était assez globalement peu satisfaisante : cette question de synthèse nécessitait d'exploiter correctement les résultats des questions 7-b) et 7-d). En particulier, elles ne suffisaient pas telles quelles à obtenir la dernière assertion de l'énoncé (à savoir que la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$ était elle aussi symplectique), et de nombreux candidats n'ont pas justifié correctement ce dernier point.

8) La rédaction d'un raisonnement par récurrence doit être revue par une très grande partie des candidats : très peu de copies ont obtenu la totalité des points sur cette question. Rappelons que la propriété à démontrer doit être précisée exactement et dépendre clairement d'un paramètre entier naturel n permettant la réalisation de la récurrence. Notons qu'il était ici naturel de noter $2n$ la dimension de l'espace vectoriel (puisque celle-ci est paire d'après la question 4), ce qui permettait le recours à une récurrence faible. En cas d'utilisation d'une récurrence forte, la propriété à démontrer devait être rédigée correctement, ce qui n'a pas souvent été le cas. Par ailleurs, l'initialisation de la récurrence était donnée par le résultat de la question 6, mais de trop nombreux candidats ont partiellement ou complètement omis de préciser cette étape. Enfin, la rédaction de la récurrence à proprement parler était dans l'ensemble médiocre, notamment car l'argument-clé sur laquelle elle repose (à savoir la production d'un sous-espace de dimension 2 sur lequel la forme est effectivement non dégénérée) a été considéré comme évident par une partie importante des candidats. De même, extrêmement peu de candidats ont pris la peine de vérifier que la matrice d'une forme symplectique définie sur la somme directe d'un espace et de son orthogonal était effectivement diagonale par blocs. Cette question a par conséquent été assez discriminante dans le classement des copies.

9) Il est important de répondre en intégralité à la question posée : de nombreux candidats ont totalement omis de conclure quant à l'existence d'une base dans laquelle la matrice de ω était J_n, et une grande partie des autres a donné un argument vague du type « il suffit de changer l'ordre des vecteurs de la base », ce qui était insuffisant. Une erreur de signe a été souvent commise dans la seconde partie de la question, probablement par volonté d'aller vite : la structure complexe domptée par ω ne correspondait pas à la matrice J_n, qui donnait lieu à un produit scalaire négatif, mais à sa transposée (i.e. à son opposée). Plusieurs candidats ont remarqué ce changement de signe : la plupart d'entre eux ont considéré qu'il y avait une erreur de définition dans l'énoncé (ce qui n'était pas le cas), quelques rares autres ont admis une possible erreur de calcul de leur part.

10) Cette question a globalement été bien traitée, même si l'argument de dimension permettant de se limiter à prouver l'injectivité (ou la surjectivité) du morphisme proposé n'a pas toujours été correctement rédigé. Notons que plusieurs candidats ont des difficultés à énoncer et utiliser correctement le lemme de Gauss et/ou le théorème de Bezout, ce qui est rédhibitoire à ce niveau.

11) Une petite partie des candidats a pensé à l'équivalence entre la simplicité des racines de P et le fait que P et P' étaient premiers entre eux, mais très peu ont fait un lien correct avec la question précédente à l'aide du déterminant. Par ailleurs, la vérification de l'aspect polynomial de la fonction proposée n'a généralement pas été traitée correctement (lorsqu'elle l'a été), ce qui était pourtant l'un des points importants de la question.

12) Cette question difficile a été traitée par peu de candidats, et réussie dans extrêmement peu de copies, correspondant essentiellement toutes à des copies de très bon niveau. Rappelons qu'il est totalement faux d'affirmer qu'un polynôme non nul à plusieurs variables a nécessairement un nombre fini de zéros : le cas du polynôme $P(X-Y)=X-Y$ suffit aisément à s'en convaincre.

13) Pour l'unicité de u, on retrouve dans certaines copies les mêmes erreurs que celles réalisées dans la preuve de l'unicité en question 3-a). L'existence de u a quant à elle été correctement traitée dans l'ensemble.

14-a) Une partie non négligeable des candidats a exploité sans le préciser (voire sans le réaliser) la propriété d'unicité démontée en question 3-b), ce qui rendait leur argument incomplet. Par ailleurs, quelques candidats n'ont pas répondu à la question posée, faisant intervenir dans leur réponse la matrice de la forme ω_1, alors que seules les matrices U et J_4 devaient être considérées.

14-b) Cette question a été mal comprise par certains candidats, qui ont confondu condition nécessaire et condition suffisante. En effet, il ne suffisait pas de prendre une matrice de la forme proposée et de vérifier qu'elle satisfaisait effectivement à la relation de la question 14-a), puisqu'il fallait en réalité prouver que la relation de la question 14-a) impliquait nécessairement que la matrice U soit de la forme proposée.

14-c) La formule donnant le polynôme caractéristique d'une matrice de taille 2×2 en fonction de son déterminant et de sa trace semblait inconnue de plusieurs candidats, ce qui est inconcevable à ce niveau. Par ailleurs, affirmer sans aucun calcul que T était bien un polynôme annulateur (en se contentant d'une vague justification du type « il suffit de développer la formule donnant $T(U)$ ») était évidemment largement insuffisant : un minimum d'explications était requis, et l'on ne pouvait notamment espérer avoir la totalité des points sans citer explicitement l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton pour la matrice N ainsi que pour sa transposée.

15) La rédaction de la preuve de la première partie de la question a été laborieuse chez une grande partie des candidats, notamment pour ce qui concerne la preuve du fait que le polynôme T était bien scindé à racines simples : le lien avec la non-existence de valeurs propres réelles de U a quasiment systématiquement été mentionnée, mais le fait que les valeurs propres de U correspondaient bien aux deux racines de T n'a pas souvent été correctement rédigé. Cette question a par ailleurs permis de révéler une confusion entre polynôme minimal et polynôme annulateur chez de nombreux candidats.

16) La confusion entre les structures réelles et complexes a gêné de nombreux candidats, et les quelques raisonnements corrects et complets se retrouvent uniquement dans les meilleures copies. Trop peu de candidats ont par ailleurs pensé à justifier pourquoi la vérification de la liberté de cette famille sur $\mathbb{R}$ était suffisante pour conclure, ce qui reflète le manque de rigueur général observé par les correcteurs dans la rédaction des arguments.

17) à 19) Ces trois questions n'ont généralement pas été traitées, et seules quelques très rares copies ont traité correctement au moins deux de ces questions, lesdites copies étant une fois encore parmi les toutes meilleures de cette session.

20) Cette question, qui était une application directe du lemme des noyaux, n'a pas toujours été bien traitée. En particulier, plusieurs candidats ont tenté de redémontrer le lemme des noyaux en admettant le cas $n = 2$, ce qui n'était pas pertinent. La justification de la stabilité des espaces F_j a en outre souvent été omise, ce qui fut pénalisé.

21) Peu de candidats ont correctement rédigé l'argument permettant de déduire le résultat pour $F_j^{\omega_1}$ à

partir de celui pour F_j^ω et du résultat de la question 13). Par ailleurs, de nombreuses copies présentent un argument reposant sur l'inversion locale du morphisme u, qui n'était ni nécessaire ni correcte : trop peu de démonstrations utilisant correctement le théorème de Bézout ont été relevées, alors que ce théorème est tout de même l'un des principaux outils à disposition lorsque l'on travaille avec des polynômes premiers entre eux.

22) Parmi les quelques candidats ayant abordé cette question, bien peu ont correctement rédigé l'argument permettant de justifier la décomposition $F_j^\omega = \bigoplus_{k\neq j} F_k$. En particulier, le recours aux résultats de la première partie n'a pas toujours été envisagé, donnant ainsi des preuves tronquées.

23) Cette question d'application nécessitait une synthèse ordonnée des résultats précédents. Quasiment tous les candidats ayant abordé cette question ont pensé à utiliser le polynôme caractéristique de u, mais très peu ont produit une justification correcte des valeurs prises par la dimension des sous-espaces caractéristiques.

24) à 26) Ces questions de synthèse assez difficiles n'ont été que rarement traitées, pas nécessairement par les candidats ayant les meilleures notes, et n'ont été que très rarement correctement résolues. Il n'était pas nécessaire d'aborder la quatrième partie pour avoir d'excellents résultats : rappelons encore qu'il est toujours plus efficace de proposer une rédaction correcte et complète de quelques parties du sujet que d'en survoler l'ensemble.