2.3.4 Conclusions

Cette épreuve était progressive, les six premières questions étaient abordables et permettaient aux candidats sérieux de gagner des points. Malheureusement, par manque de connaissances ou par volonté d'aller vite, un certain nombre de candidats n'a pas traité ces questions assez sérieusement. Nous conseillons donc aux candidats d'être attentifs à ce premier groupe de questions plutôt que d'aller tenter une ou deux questions faisables mais éparpillées dans le sujet ou de ne prendre son temps que pour les questions difficiles.
Ce sujet permettait de faire une distinction entre les excellents candidats et les élèves sérieux, mais aussi entre les candidats sérieux et ceux dont le travail pendant deux ans a pu manquer d'intensité. À l'opposé de copies très faibles, certaines excellentes, mais très rares, ont abordé tout le sujet de façon correcte.

2.4 Mathématiques 1 - filière PC

2.4.1 Présentation du sujet

Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in N^*$. Le sous-espace $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des constitué des matrices triangulaires supérieures strictes est d'une part constitué de matrices nilpotentes, d'autre part de dimension $\binom{n}{2}$. Les deux résultats suivants ont été établis par Gerstenhaber en 1958 si $\mathbb{K}$ est de cardinal supérieur ou égal à n, puis étendus par Serezhkin au cas général en 1982.

Théorème A. Tout sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes est de dimension au plus $\binom{n}{2}$.

Théorème B. Tout sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes et de dimension $\binom{n}{2}$, est conjugué à $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En revanche, dès que $n \geq 3$, il existe des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitués de matrices nilpotentes qui ne sont conjugués à aucun sous-espace de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit, il existe des sous- espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitués de matrices nilpotentes, maximaux au sens de l'inclusion pour cette propriété, mais de dimension strictement inférieure à $\binom{n}{2}$.
La démonstration du théorème A pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a fait l'objet d'un problème au CCMP (PSI, Maths II, 2016). Le but du présent texte est d'établir le théorème B, toujours pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En fait, la démonstration du théorème A est implicite dans le présent sujet. L'argumentation suit celle donnée dans les parties 2 et 3 de l'article *The structured Gerstenhaber problem (II), Linear Algebra and its Applications*, vol. 569, 2019, pp. 113-145.
La limitation à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ permet de contourner les arguments de dualité via la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$; avec des modifications évidentes, la preuve s'adapte au cas traité par Gerstenhaber [1].

2.4.2 Commentaires généraux

Le sujet, d'un grand intérêt mathématique, met en jeu une partie très significative des programmes d'algèbre de PCSI et PC : algèbre linéaire élémentaire, espaces euclidiens, réduction. Il est très long, d'un niveau conceptuel élevé, notamment par une rédaction privilégiant systématiquement le point de vue géométrique sur celui des matrices et la nécessité qu'il impose d'absorber un grand nombre de notations. Il comporte cependant un certain nombre de questions simples. Il a permis de tester la connaissance et la compréhension du cours des candidats, leur niveau d'abstraction, ainsi que, pour les meilleurs d'entre-eux, leur capacité à rentrer dans une démonstration subtile.
Les meilleurs candidats ont bien compris le problème. Une partie significative a produit une copie substantielle. L'étalonnage des notes est assez satisfaisant. Les correcteurs déplorent cependant un

1. La restriction sur le corps vient de l'utilisation d'arguments polynomiaux.

contingent assez fort de copies presque vides et une quantité surprenante de copies superficielles, qui donnent à beaucoup de questions des réponses sans aucun contenu, voire dépourvues de sens.

2.4.3 Conseils aux futurs candidats

Comme toujours, ce sujet récompensait le travail en profondeur du cours. Vu la multiplicité des objets algébriques considérés, il demandait une rigueur soutenue en matière de typage. Beaucoup de candidats semblent avoir perdu pied très rapidement faute d'avoir su prendre le recul nécessaire. Certains se sont arrêtés, d'autres ont produit des réponses contenant beaucoup de confusions. Soulignons qu'il est impératif, pour répondre à une question, d'avoir une conception claire des objets manipulés : confondre scalaires, vecteurs et applications linéaires ou considérer des produits de vecteurs fait très mauvaise impression !

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie ; l'algèbre linéaire repose sur des intuitions géométriques essentielles, manifestement insuffisamment perçues par la plupart des candidats. Nous leur recommandons également de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles : les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie. Nous rappelons enfin que les questions faciles doivent être correctement et complètement rédigées pour être valorisées, surtout en début de problème.Rappelons pour conclure l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées.

2.4.4 Analyse détaillée des questions

Q1 - La réponse à cette question comportait plusieurs arguments très classiques : la possibilité de trigonaliser toute matrice carrée complexe, le calcul des termes diagonaux des puissances d'une matrice triangulaire supérieure, l'invariance de la trace par changement de base. La question a été massivement abordée, mais la nullité des termes diagonaux et l'invariance de la trace par similitude ont donné des résultats assez décevants.

Q2 - La question, elle aussi souvent traitée, demandait plusieurs vérifications, toutes simples. On relève assez fréquemment l'erreur grossière suivante : une combinaison linéaire d'endomorphismes nilpotents est nilpotente. La relation $u_{n-1} \neq 0$ est assez souvent oubliée. Enfin, trop peu de copies utilisent l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associé à une base.

Q3 - Beaucoup de candidats traitent correctement la première partie, très classique. La seconde, plus délicate, est souvent abordée de façon incomplète. Un nombre non négligeable de candidats pense conclure en énonçant qu'une famille obtenue par concaténation de deux familles libres est libre, ce qui traduit un manque de vision géométrique surprenant en fin de CPGE.

Q4 - L'inégalité $p \leq n$ et l'inclusion facile sont traitées dans beaucoup de copies. Le reste de la question, plus difficile s'est révélé très sélectif. Peu de candidats ont pensé à se placer dans une base judicieuse (en fait, de Jordan) donnée par la question 3.

Q5 - Cette question très simple et très classique (représentation des formes linéaires sur un espace euclidien) donne des résultats décevants. Dans de nombreuses copies, on trouve des réponses folkloriques à la première partie. La seconde consiste à vérifier la linéarité de φ_a à a fixé, la linéarité de l'application de E dans son dual, son injectivité, avant de conclure par égalité des dimensions ; ces vérifications, toutes très simples, sont rarement complètes.

Q6 - Question assez analogue dans son esprit à la précédente, moins classique toutefois. Le caractère abstrait des objets manipulés s'est révélé un obstacle infranchissable pour une grande partie des candidats.

Q7 - Plusieurs démonstrations étaient possibles pour cette question, qui laissait de l'initiative aux candidats : il était ainsi possible de raisonner dans une base orthonormée quelconque, ou dans une base plus adaptée aux données de la question. La majorité des candidats a préféré passer à la question 8 ; parmi ceux qui ont abordé la question, une partie significative a produit un argument satisfaisant.

Q8 - Dans une écrasante majorité, les candidats répondent à cette question en utilisant la formule du binôme, sans remarquer que u et v ne sont pas supposés commuter. Une récurrence sur k donnait facilement l'existence ; les correcteurs ont généreusement noté des arguments moins formalisés mais corrects sur le fond. L'unicité, qui se ramenait à la détermination d'un polynôme réel par la donnée de la fonction polynomiale associée, a très rarement été rédigée de façon convaincante.

Q9 - Dans beaucoup de copies, la relation $(u+tv)^p = 0$, qui est un passage obligé, est à nouveau incorrectement justifiée par le caractère nilpotent d'une combinaison linéaire d'endomorphismes nilpotents. L'argument d'unicité est rarement explicité.

Q10 - La première partie de la question est souvent traitée. Cependant, les propriétés de la trace sont rarement explicitées et certains candidats se trompent sur le nombre de termes de la somme. La deuxième partie est traitée dans de bonnes copies.

Q11-12 - Ces deux questions concluent la partie III. Elles nécessitent une bonne compréhension des objets introduits et n'ont souvent reçu que des bribes de solution. Le fait que l'espace soit de dimension finie a rarement été invoqué pour justifier l'argument de biorthogonalité.

Q13 - Cette question, très simple, puisque tous les ensembles considérés sont des noyaux ou des images d'applications linéaires naturelles, a été fréquemment abordée, souvent avec un succès partiel. Beaucoup de candidats ont cependant fourni des démonstrations lourdes, voire incomplètes ou fausses (problèmes de typage sur l'espace ambiant).

Q14 - Cette question reposait sur deux applications successives du théorème du rang. Elle n'a été bien traitée que dans très peu de copies. Les correcteurs déplorent plusieurs solutions parfaitement fantaisistes, dans lesquelles il est difficile de voir autre chose que des tentatives d'escroquerie.

Q15-16 - Ces questions n'étaient pas difficiles pour qui avait assimilé la définition du produit tensoriel. Elles ont cependant rarement été bien traitées.

Q17 - L'argument de valeur propre a parfois été vu. On note par ailleurs, dans un certain nombre de réponses, l'apparition d'objets sans signification (puissance p-ième d'un vecteur).

Q18 - Question assez formelle, qui pouvait se traiter directement ou via une représentation matricielle par blocs. Beaucoup de candidats ont présenté ici un discours peu consistant.

Q19 - Des candidats en petit nombre ont su analyser les inégalités établies précédemment.
La suite du problème n'a donné lieu qu'à du grappillage.

2.5 Mathématiques 2 - filière PC

2.5.1 Généralités et présentation du sujet

L'objectif de ce problème était de montrer que l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \ P \in \mathbb{R}[X],$$

est dense dans l'espace des fonctions continues et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour éviter d'excessives difficultés techniques, on se limitait à approcher les fonctions continues, paires et support compact.
Le sujet avait été conçu pour être extrêmement progressif et balayer un grand nombre de chapitres du programme : fonctions d'une variable réelle, intégration, séries numériques et entières, produits scalaires et espaces euclidiens, espaces normés. Toute sa première partie (7 questions) est constituée uniquement de questions de cours ou très proches du cours. La deuxième partie (10 questions), consacrée à l'étude d'un espace de fonctions de carré intégrable pour un certain poids, et du produit scalaire associé,