1.2 E - MATHEMATIQUES II - filière PC

REMARQUE GENERALE

Le sujet de cette année portait principalement sur le programme d'algèbre linéaire, avec quelques éléments d'analyse.

REMARQUES PARTICULIERES

Q 1 • La première question a suscité beaucoup de difficultés et une bonne partie des candidats n'a pas même abordé cette question. De nombreux candidats ont évoqué la multilinéarité du déterminant par rapport aux lignes ou colonnes mais, souvent, sans pouvoir l'utiliser correctement. Certains candidats qui connaissaient bien le cours ont pensé à utiliser un argument polynomial, en remplaçant d_n par une variable x et en étudiant les racines de ce polynôme et son coefficient dominant. Le jury regrette enfin d'avoir lu, sur un nombre non négligeable de copies, des tentatives pour prouver l'absurdité $(d_i)_n = d_i^n$.

Q 2 • A la différence de la Question 1, la Question 2, basée sur la multilinéarité du déterminant par rapport aux lignes et aux colonnes, a été bien traitée par la majorité des candidats.

Q 3 • Une difficulté de cette question était l'utilisation correcte de la multilinéarité ou des opérations sur les lignes d'une matrice. Un bon nombre de candidats s'est égaré dans des énormités du type $\det(A+B) = \det A + \det B$. L'autre ingrédient de cette question était la formule de Leibniz.

Q 4 • Pour réussir cette question, il fallait utiliser la question précédente, puis un développement par rapport à la premire colonne. Les candidats qui ne se sont pas appuyés sur la Question 3 ont rencontré beaucoup de difficultés.

Q 5 • Cette question très élémentaire a été en général bien traitée. Toutefois, le jury s'est étonné de constater qu'un nombre non négligeable de candidats ignorait la définition d'une famille liée : des vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ peuvent être liés sans qu'ils en existe deux qui soient proportionnels !

Q 6 • Encore une question élémentaire qui a été étonnamment mal traitée. En effet, si la majorité des candidats parvient à l'égalité $f_1 f_2' - f_2 f_1' = 0$, peu d'entre eux concluent correctement la démonstration en intégrant l'identité $f_1'/f_1 = f_2'/f_2$ ou en reconnaissant la dérivée de f_1/f_2.

Q 7 • Les bonnes réponses ont été extrêmement rares : dans la plupart des copies où cette question a été abordée, l'exemple proposé est formé de deux fonctions trivialement liées (voire identiques !). L'immense majorité de candidats n'a pas vu les contraintes imposées par la question 6 pour construire un tel exemple.

Q 8 • Dans cette question, un bon nombre de candidats a essayé d'itérer n fois le résultat de la question 4, ce qui a mené le plus souvent à un échec. Il s'agissait d'abord de distinguer deux cas : f_1 nulle sur tout I, ou bien f_1 non nulle en un point et par conséquent, par continuité, sur un intervalle J, d'où par la question 4 : $W_{n-1}((\frac{f_2}{f_1})',\ldots,(\frac{f_n}{f_1}))')=0$ sur J. Il ne restait qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence et à intégrer correctement une combinaison linéaire de $(\frac{f_2}{f_1})',\ldots,(\frac{f_n}{f_1})'$, ce qu'une minorité de candidats a réussi à faire.

Q 9 • Cette question délicate a été très rarement correctement traitée, même dans le cas $n=2$. La plupart des candidats l'ayant abordée se sont contentés de considérations formelles sur les systèmes d'équations linéaires et l'inversibilité des matrices, sans du tout tenir compte de la condition sur les ordres que l'on cherchait à obtenir.

Q 10 • Cette question comportait deux ingrédients : la dérivation terme à terme des séries entières, et la gestion correcte des restes en $o(1)$. Peu de candidats ont su le faire avec rigueur, et ils ont été recompensés. Les correcteurs ont lu beaucoup de citations vagues des questions 1 et 2 qui ne pouvaient pas être prises en compte. Presque personne n'a vu le rôle de l'hypothèse portant sur les ordres des fonctions $g_1,\ldots,g_n$.

Q 11 • Cette question n'a pas suscité de difficultés.

Q 12 • Cette question reposait entièrement sur l'identité

$$W_n(g_1,\ldots,g_n)=W_n(f_1,\ldots,f_n)\cdot\det A.$$

On a rencontré avec surprise dans certaines copies des objets dénués de sens comme des déterminants de vecteurs lignes.

Q 13 • Dans cette question, beaucoup de candidats ont essayé de faire un raisonnement par récurrence sur n pour démontrer que $\Delta^{n-1}(X^n)$ est de la forme $aX+b$, mais ne sont pas arrivés à le mener à bien. Or il s'agissait essentiellement de s'apercevoir que l'opérateur Δ abaisse d'une unité le degré d'un polynôme non constant, à cause de l'identité

$$(X+1)^n-X^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^k,$$

que l'on a trop rarement renconteée. La deuxime partie de la question, délicate, n'a pratiquement jamais été abordée avec succès.

Q 14 • De trop nombreux candidats ont pensé résoudre cette question en composant *a gauche* l'identité de la question précédente par g, allant parfois jusqu'à invoquer la "linéarité de g".

Q 15 • Il suffisait de remarquer que $k(2)\neq 1$, par exemple pour des raisons de degré.

Q 16 • La première partie de cette question ($Z_1=Z_2$) découle de la multilinéarité du déterminant et a été bien traitée par la majorité des candidats. La deuxième partie a été très peu traitée. L'élément clé – la minimalité de $k(n)$ – a été évoqué dans très peu de copies, les résultats précédents (la Question 12 ou bien la Question 8) n'étant presque jamais utilisés.

Q 17 • L'argument-clé (la divisibilité de $(f^n)^{(i)}$ par f^{n-i}) a été repéré par très peu de candidats.

Q 18 • La question a été très peu traitée, les candidats n'ayant en général pas su exploiter la forme du déterminant.

Q 19 • Peu de candidats ont réussi cette question, simple combinaison des résultats des trois précédentes. Presque personne n'a remarqué le rôle crucial de la non-nullité de Z_1.

Q 20 • Presque personne n'a appliqué le résultat de la Question 19 à bon escient pour réussir cette question.

En conclusion, on peut réitérer le conseil donné chaque année : apprendre le cours en profondeur, de nombreux candidats ne maitrisant pas les notions élémentaires de familles libres/liées, le calcul matriciel et celui des déterminants, le calcul intégral élémentaire. Par ailleurs, le jury souhaite communiquer un autre message important aux candidats : *il faut prendre le temps nécessaire pour saisir les objetifs du sujet et sa cohérence, et ne pas se laisser déstabiliser, même si l'on rencontre des notions étudiées dans des situations inhabituelles.* Les candidats qui ont essayé de bien comprendre le fil conducteur du sujet et se sont servis correctement des questions précédentes ont été recompensés.