1.2 Mathématiques 1 - filières MP et MPI

1.2.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème portait sur une intégrale de Dirichlet généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$$

qui était utilisée dans la dernière partie pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire.

Le sujet comprenait quatre parties qui ne sont pas indépendantes, mais il y avait beaucoup de questions fermées, ce qui permettait d'avancer en admettant les résultats non démontrés. Une proportion significative de candidats qui a traité la dernière partie quasiment in extenso, en ayant plus ou moins sauté des questions antérieures.

La longueur et la difficulté étaient raisonnables, les points étaient répartis régulièrement dans tout le sujet. Nous avons obtenu une moyenne brute très convenable, un écart-type satisfaisant et un bon étalement des notes, qui ont permis de classer correctement les candidats. Quelques candidats ont obtenu la note maximale et il y a eu une proportion non négligeable de notes supérieures à 15.

Les correcteurs ont observé une dégradation de la présentation des copies par rapport aux années précédentes. L'interdiction des effaceurs et autres ne justifie pas les torchons.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe A.

1.2.2 Conclusion

Dans les recommandations aux futurs candidats, on peut commencer par la précision de la rédaction. Quand le sujet est, comme celui-ci, relativement abordable, il ne faut pas oublier des hypothèses en appliquant un théorème et il faut être très précis dans leur vérification.

Rappelons qu'appliquer un théorème en mathématiques ne se réduit pas à citer le nom d'un mathématicien ou d'un théorème, mais à vérifier certaines hypothèses et à en déduire des conclusions.

Ensuite, quand il y a des calculs, comme c'était le cas ici, la copie ne doit pas servir de brouillon. Les correcteurs sont conscients que l'interdiction des effaceurs et autres dispositifs crée une difficulté, mais il faut que les candidats comprennent qu'il n'y a pas de bénéfice du doute à leur profit : la consigne est très claire, si on ne peut pas lire ou s'il faut chercher les résultats au milieu de gribouillages, les points destinés à la question ne sont pas attribués au candidat.

1.3 Mathématiques 2 - filière MP et MPI

1.3.1 Présentation du sujet

Le sujet de cette épreuve de quatre heures concernait les graphes.

Les définitions de base sur les graphes (sommets, arêtes, matrice d'incidence) étaient rappelées au début du sujet. Les notions utilisées sont connues par tous les élèves de 1ère année ; elles sont d'un niveau élémentaire. Les élèves ayant suivi l'option informatique, ou les élèves de MPI, n'étaient pas avantagés. Ainsi, une comparaison minutieuse des notes obtenues aux questions théoriques concernant les graphes ne fait apparaître aucune différence entre les deux filières.

La première partie proposait une étude algébrique des matrices d'adjacence, alors que les deux suivantes, indépendantes de la 1ère, concernaient les graphes aléatoires.

Le sujet était plutôt difficile, sauf la seconde partie. Seule la première partie faisait un peu appel au programme de seconde année, avec un soupçon de réduction, mais les deux autres parties, traitant de dénombrement et de probabilités sur un univers fini, concernaient le programme de 1ère année.

La première difficulté venait du nombre important de notions introduites, et des notations correspondantes ; le sujet faisait 8 pages, et pour répondre aux questions, il fallait assez souvent feuilleter à nouveau l'énoncé pour retrouver une définition ou une notation.

La seconde difficulté venait du niveau d'abstraction demandé aux candidats afin de comprendre toutes les définitions. En effet, le concepteur du sujet a choisi de se placer dans un cadre général, où les sommets des graphes peuvent être indexés par un ensemble quelconque, ce qui obligeait à introduire systématiquement une bijection entre cet ensemble et l'ensemble $[\![1;n]\!]$, lequel ensemble pouvant également être permuté. Cette complication a fortement perturbé les candidats. La plupart d'entre eux ont d'ailleurs négligé ce point et considéré, consciemment ou non, que l'ensemble des sommets était toujours $[\![1;n]\!]$. Nous tenons à préciser que le jury n'a pas sanctionné cette interprétation. De même, certaines questions ou exemples faisaient inutilement intervenir des sommets isolés ; beaucoup de candidats les ont oubliés, et, là encore, le jury n'en a pas tenu compte.

Le jury a donc été plutôt tolérant sur les questions délicates de la 1ère partie, privilégiant la bonne compréhension du problème à la recherche d'une rigueur mathématique non indispensable. Il n'en a pas été de même pour les deux parties suivantes où, comme il s'agissait de probabilités, beaucoup de candidats se croyaient autorisés à écrire n'importe quoi ou à répondre au hasard. Cela a en général été très sévèrement sanctionné.

1.3.2 Remarques sur la présentation des copies

Propreté

Le jury a constaté cette année une amélioration assez notable de la qualité de la présentation. Les rappels incessants lors des rapports des années précédentes pourraient avoir porté leurs fruits.

Néanmoins, il subsiste un nombre significatif de copies où la présentation laisse à désirer, certaines pouvant être traitées de véritables torchons.

Cela fait partie de tous les rapports de tous les concours et est enseigné aux collégiens dès l'entrée en 6ème. Il est utile de rappeler quelques règles simples :

- Il faut utiliser un brouillon.
- Il faut utiliser une encre de couleur foncée et un stylo qui ne bave pas.
- Il faut écrire lisiblement ni trop petit ni trop gros.
- Il faut éviter les ratures.
- Il faut mettre en valeur les résultats, en les soulignant ou en les encadrant. Rappelons aussi qu'il existe pour ce faire un instrument qui s'appelle une « règle ».

Cette année, le jury de l'épreuve de Maths 2 MP a décidé d'inclure dans le barème un item spécifique concernant le soin, la présentation et la rédaction. Un malus a ainsi *systématiquement* pénalisé les copies qui ne mettaient pas en valeur les résultats, et/ou qui comportaient trop de ratures.

Rédaction

Indépendamment de la propreté, les correcteurs ont été globalement déçus par la qualité de la rédaction. Dans certaines questions, en particulier dans la 1ère partie, beaucoup de candidats se lancent dans des explications interminables en Français, souvent parsemées de « on montre facilement que », « de façon immédiate », « on a donc », mais qui ne contiennent finalement aucun argument sérieux. Dans certains cas, le correcteur a dû renoncer à essayer de comprendre ce que le candidat voulait dire. Dans d'autres questions, au contraire, on voit quelques lignes de calcul non expliquées, sans introduction, ni conclusion, ni même une seule phrase en Français. C'est particulièrement le cas dans les questions de probabilités. Que les candidats sachent que toute réponse non justifiée, même juste, a en général obtenu la note 0 : on ne donne pas de points au bénéfice du doute.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe B.

1.3.3 Conclusion

Il est important que les futurs candidats sachent que l'on attend d'eux un document structuré, agréable à lire, où l'on trouve des argumentations claires, concises et rédigées dans un Français correct. On attend aussi de la rigueur et de l'honnêteté : si un signe, ou le sens d'une inégalité, ne convient pas, par exemple, inutile de vouloir berner le correcteur en le changeant plus ou moins discrètement, le candidat ferait mieux dans ce cas là de relire ce qu'il a écrit avant. De même, si un résultat n'est pas cohérent, ou n'est pas tout à fait celui souhaité, inutile de faire comme si de rien n'était et d'écrire « donc on trouve que » suivi du résultat donné dans l'énoncé. Il vaut mieux être honnête ; certains candidats, trop rares, n'hésitent pas à mentionner que leur résultat est erroné, mais qu'ils n'ont pas trouvé l'erreur. Si la démarche était correcte, le correcteur peut alors attribuer des points.

1.4 Mathématiques 1 - filière PC

1.4.1 Présentation du sujet

Le problème a pour but d'établir que si f est une fonction strictement positive continue et à croissance lente telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \ln(f(x))f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{f'^2(x)}{f(x)}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Cette inégalité est en fait une inégalité de Sobolev logarithmique (Gross 1975) qui sont des inégalités de la forme :

$$Ent_\mu(f^2) \leq cE_\mu Q(f)$$

où μ est une mesure de probabilité (ici μ est la mesure canonique de Gauss), $E_\mu(g)$ représente la moyenne de g sous μ (son espérance) et $Ent_\mu(f) = E_\mu(f\ln f) - E_\mu(f)\ln(E_\mu(f))$ (dans notre cas le deuxième terme est nul) et Q une forme quadratique. Ces inégalités viennent en complément des inégalités plus classiques de Poincaré qui sont du type :

$$Var_\mu(f) \leq cE_\mu(Q(f)).$$

La première partie du problème introduit les fonctions à croissance lente et permet de montrer qu'elles sont dans $L^1(\mu)$ et forment un espace vectoriel.

La deuxième partie introduit une fonction intermédiaire dépendant d'un paramètre t dont l'étude de l'entropie en fonction de t va permettre dans la dernière partie du problème de montrer l'inégalité recherchée.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe C.