Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$: $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. **Calcul d'une somme**

   1.1. Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.

   1.2. En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.

   1.3. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
3. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$.
   On utilisera la question **1.3** pour simplifier le résultat.
4. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible}\}$.

EXERCICE 2

On note $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On rappelle que pour tout $(x,t) \in [0,1]^2$, on note $\min(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$.

Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de α, l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$.
2. Soient $h \in E$ et $a \in [0,1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et déterminer sa dérivée.

*****

3. **Cas particuliers**

   3.1. Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0,1]$.

   3.2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\,\mathrm{d}t$.

   3.3. Soit x un réel de $[0,1]$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de x.

4. Soit $f \in E$.

4.1. Justifier que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, calculer $F'(x)$.

4.2. Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.

4.3. Démontrer alors que F est de classe C^2 sur $[0,1]$ et montrer que $F'' = -f$.

À toute fonction f de E, on associe $T(f)$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1],\quad T\,(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que T est un endomorphisme de E.

6. L'application T est-elle injective ?

7. On pose $A = \left\{G \in C^2([0,1],\mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\right\}$.

7.1. Montrer que $\mathrm{Im}(T) \subset A$.

7.2. Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.

7.3. Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

8. Recherche des éléments propres de T

8.1. Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T, alors λ est strictement positive. *On pourra utiliser la question **4.***

8.2. Déterminer les valeurs propres de T. *On pourra aussi utiliser la question **4.***

8.3. Pour chaque valeur propre de T, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On identifie dans tout l'exercice $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.
Pour p et q deux entiers naturels non nuls et pour toute matrice A de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ la matrice de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, transposée de la matrice A.
On rappelle que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X_1 et X_2 de $\mathbb{R}^n$ est : $(X_1|X_2) = X_1^\top X_2$ et que $\|X_1\|^2 = X_1^\top X_1$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs **linéairement indépendants** de $\mathbb{R}^n$.

On définit la matrice $M = \left(m_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\;\; m_{ij} = \delta_{ij} + \alpha\, x_i\, x_j + \beta\, y_i\, y_j$, où α et β sont deux réels et δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Enfin, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est M.

1. Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note $U_X = X\,X^\top$.

2.1. Justifier que $U_X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire son terme général. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

2.2. Déterminer le rang de U_X puis une base de son image.

2.3. Prouver que $\operatorname{Ker}(U_X)$ et $\operatorname{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

2.4. Prouver que $\operatorname{Ker}(U_X)$ et $\operatorname{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

2.5. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X.

2.6. On note u_X l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U_X. Déterminer la matrice de u_X dans une base adaptée à la décomposition de la question **2.4.**

3. Dans le cas particulier où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, déterminer les valeurs propres de la matrice M.
En déduire une matrice diagonale semblable à la matrice M.

4. On revient au cas général et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$, quelles que soient les valeurs de α et de β.

4.1. On note $F = \operatorname{Vect}(X, Y)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

4.1.1. Déterminer MX.

4.1.2. En déduire que F est stable par f.

4.2. Justifier que $F^{\perp}$ est aussi stable par f et déterminer l'endomorphisme induit par f sur $F^{\perp}$.

4.3. On note $G = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \|X\|^2 & \alpha (X|Y) \\ \beta (X|Y) & 1 + \beta \|Y\|^2 \end{pmatrix}$.

4.3.1. Justifier que G est la matrice de l'endomorphisme induit sur F par f dans la base (X, Y).

4.3.2. Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$.

4.3.3. Justifier, sans calculer ses valeurs propres, que G est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont réelles.

4.3.4. Déterminer les valeurs propres de G.

4.4. Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

EXERCICE 4

1. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

On pose, lorsque cette intégrale existe, $\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^{1/n}}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$.

1.1. Soit α un réel strictement positif.

1.1.1. Rappeler un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto (1+h)^{\alpha}$.

1.1.2. En déduire un équivalent, au voisinage de 1, de $t \mapsto 1 - t^{\alpha}$.

1.2. Soit β un réel.

Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\beta}}\,\mathrm{d}t$ converge.

1.3. Justifier l'existence de γ_n pour tout $n \geqslant 2$.

2. Démonstration d'un encadrement

2.1. Démontrer que l'on a :

- pour tout réel t : $1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$,
- pour tout réel t négatif : $\mathrm{e}^t \leqslant 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$.

2.2. On pose pour tout entier naturel m et pour tout réel u : $U_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k\,!}$.

Soit p un entier naturel non nul.

On suppose que : $\forall u \leqslant 0,\ U_{2p-1} \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p}$.

2.2.1. Démontrer que : $\forall u \leqslant 0,\ U_{2p+1} \leqslant \mathrm{e}^u$.

2.2.2. Démontrer également que : $\forall u \leqslant 0,\ \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p+2}$.

2.3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de e^u lorsque u est un réel négatif ou nul.

3. Démontrer que l'on a, pour tout $t \in]0,1[$, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $p \geqslant 1$:

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k \leqslant 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k.$$

4. Prouver que, pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$ existe.

On rappelle que $\ln(t)$ *est équivalent à* $t - 1$ *au voisinage de* 1.

5. Démontrer que l'on a pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$$

6. Soit p un entier naturel non nul. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t\right)$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

7. Prouver alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,\gamma_n = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

8. Prouver que, pour tout entier naturel p, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\,t^p\,\mathrm{d}t$ existe.

9. Démontrer que l'on a pour tout entier naturel p : $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\,t^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}$.

10. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+p)^2}$.

11. Prouver enfin que : $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On admettra le résultat : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN DU SUJET

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

1. **1.1.** D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k,$$

le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$ est donc $\dbinom{2n}{n}$.

1.2. Comme suggéré dans l'énoncé, on écrit $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, on a :

$$(1+X)^n(1+X)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j\right) = \sum_{0\leq j,k\leq n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} X^{j+k}.$$

On en déduit que le coefficient de X^n dans ce produit est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

1.3. Par symétrie du coefficient binomial, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

En identifiant les deux expressions trouvées, on a $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

2. La matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure : ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale. Si $a = c$, elle a une unique valeur propre. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à un multiple de l'identité, ce qui n'est pas le cas. Si $a \neq c$, elle admet deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

3. D'après la question précédente, la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation est : $Y(\omega) \neq Z(\omega)$.

Comme $\mathbb{P}(Y \neq Z) = 1 - \mathbb{P}(Y = Z)$, on cherche $\mathbb{P}(Y = Z)$, or $[Y = Z] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} [(Y = k) \cap (Z = k)]$.