11. Prouver enfin que : $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On admettra le résultat : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN DU SUJET

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

1. **1.1.** D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k,$$

le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$ est donc $\dbinom{2n}{n}$.

1.2. Comme suggéré dans l'énoncé, on écrit $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, on a :

$$(1+X)^n(1+X)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}X^j\right) = \sum_{0\le j,k\le n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}X^{j+k}.$$

On en déduit que le coefficient de X^n dans ce produit est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

1.3. Par symétrie du coefficient binomial, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

En identifiant les deux expressions trouvées, on a $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

2. La matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure : ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale. Si $a = c$, elle a une unique valeur propre. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à un multiple de l'identité, ce qui n'est pas le cas. Si $a \neq c$, elle admet deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

3. D'après la question précédente, la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation est : $Y(\omega) \neq Z(\omega)$.

Comme $\mathbb{P}(Y \neq Z) = 1 - \mathbb{P}(Y = Z)$, on cherche $\mathbb{P}(Y = Z)$, or $[Y = Z] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}[(Y = k) \cap (Z = k)]$.

Par indépendance des variables Y et Z et parce que les évènements de la réunion sont disjoints deux à deux, on obtient :

$$\mathbb{P}(Y = Z) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)^{2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

donc : $\mathbb{P}(Y \neq Z) = 1 - \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

4. La matrice $A(\omega)$ est inversible si et seulement si aucune des valeurs propres n'est nulle.
La probabilité pour que $A(\omega)$ soit inversible est donc :
$\mathbb{P}[(Y \neq 0) \cap (Z \neq 0)] = [1 - \mathbb{P}(Y = 0)][1 - \mathbb{P}(Z = 0)] = \left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right]^{2}$ car les variables Y et Z sont indépendantes.

EXERCICE 2

On note $E = C^{0}([0,1], \mathbb{R})$. On rappelle que pour tout $(x, t) \in [0,1]^2$, on note $\min(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$

Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$ est $E_c : r^2 + \alpha = 0$.

- Si $\alpha > 0$, les solutions de E_c sont $r_1 = \mathrm{i}\sqrt{\alpha}$ et $r_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\alpha}$. L'ensemble solution de l'équation différentielle est donc :

$$\left\{t \mapsto A\cos\left(\sqrt{\alpha}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{\alpha}\, t\right),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si $\alpha = 0$, l'ensemble solution de l'équation différentielle est :

$$\left\{t \mapsto At + B,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si $\alpha < 0$, les solutions de E_c sont $r_1 = \sqrt{-\alpha}$ et $r_2 = -\sqrt{-\alpha}$.
L'ensemble solution de l'équation différentielle est donc :

$$\left\{t \mapsto A\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\alpha}\, t} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\alpha}\, t},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

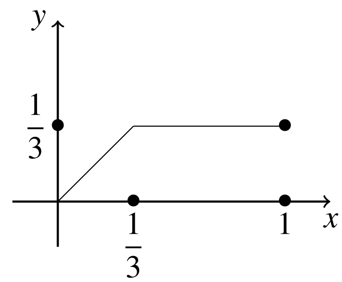
2. *Soit $h \in E$ et $a \in [0,1]$. On considère la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,dt$.*

Comme la fonction h est continue sur $[0,1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction H est de classe C^1 sur $[0,1]$ et l'on a : $\forall\, x \in [0,1]$, $H'(x) = h(x)$.

*****

3. Cas particuliers.

3.1. *Tracer la courbe représentative de la fonction* $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$.



3.2. *Calculer* $\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\, dt$.

On peut écrire que : $\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\, dt = \int_0^{\frac{1}{3}} t\, dt + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^1 dt = \frac{5}{18}$

3.3. *Soit* x *un réel de* $[0, 1]$*, exprimer* $\int_0^1 \min(x, t)\, dt$ *en fonction de* x.

Pour $0 \leqslant t \leqslant x$, on a : $\min(x, t) = t$ et pour $x \leqslant t \leqslant 1$, on a : $\min(x, t) = x$

Ainsi : $\int_0^1 \min(x, t)\, dt = \int_0^x t\, dt + x\int_x^1 dt = \frac{x^2}{2} + x(1 - x) = x - \frac{x^2}{2}$.

4. *Soit* $f \in E$.

4.1. *Justifier que* $F : x \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t)\, dt$ *définit une fonction de classe* C^1 sur $[0, 1]$ *et, pour tout* $x \in [0, 1]$, *calculer* $F'(x)$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, on peut écrire :

$$F(x) = \int_0^x t f(t)\, dt + x\int_x^1 f(t)\, dt = \int_0^x t f(t)\, dt - x\int_1^x f(t)\, dt.$$

D'après la question **2.** la fonction F est donc de classe C^1 sur $[0, 1]$ et : $\forall x \in [0, 1]$,

$$F'(x) = x f(x) - \int_1^x f(t)\, dt - x f(x) = -\int_1^x f(t)\, dt.$$

4.2. *Calculer* $F(0)$ *et* $F'(1)$ On a $F(0) = 0$ et $F'(1) = 0$ d'après les calculs précédents.

4.3. *Démontrer alors que* F *est de classe* C^2 *sur* $[0, 1]$ *et montrer que* $F'' = -f$.

Toujours d'après la question **2.** la fonction F' est donc de classe C^1 sur $[0, 1]$ et :

$$\forall x \in [0, 1], F''(x) = -f(x).$$

À toute fonction f de E, on associe $T(f) = F$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t)\, dt$$

5. *Montrer que* T *est un endomorphisme de* E.

• T est linéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.

• D'après les questions précédentes, $F = T(f)$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et donc, $F \in E$.

Conclusion : T est un endomorphisme de E.

6. *L'application T est-elle injective ?*

Soit $f \in \text{Ker}(T)$: $T(f) = 0$ donc $-f = 0$ par double dérivation et ainsi, $\text{Ker}(T) = \{0\}$, ce qui prouve que T est injective.

7. *On pose* $A = \left\{G \in C^2([0,1], \mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\right\}$.

7.1. *Montrer que* $\text{Im}(T) \subset A$.

Soit $G \in \text{Im}(T)$: $\exists\, g \in E$ tel que $G = T(g)$.

Alors, G est de classe C^2 sur $[0,1]$ d'après les questions précédentes et $G(0) = 0$ ainsi que $G'(1) = 0$.

Ainsi, $\text{Im}(T) \subset A$.

7.2. *Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.*

Pour $x \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned} T(G'')(x) &= \int_0^x tG''(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 G''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [tG'(t)]_0^x - \int_0^x G'(t)\,\mathrm{d}t + x\,[G'(t)]_x^1 \quad \text{en intégrant par parties} \\ &= -G(x) \quad \text{car } G \in A \end{aligned}$$

Par conséquent, $A \subset \text{Im}(T)$.

7.3. *Déterminer* $\text{Im}(T)$.

Des deux questions précédentes, on déduit : $\text{Im}(T) = A$.

8. Recherche des éléments propres de T

8.1. *Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T, alors λ est strictement positive. On pourra utiliser la question **4.***

On sait déjà que 0 n'est pas valeur propre car T est injective.

Si λ est une valeur propre de T, il existe une $f \in E$, non nulle, telle que $T(f) = \lambda f$.

Facilement, $T(f) = \lambda f \iff f'' + \dfrac{1}{\lambda} f = 0$.

Supposons, par l'absurde, que $\lambda < 0$: $\exists\, \omega \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda = -\dfrac{1}{\omega^2}$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme $f(x) = A\,\mathrm{e}^{\omega x} + B\,\mathrm{e}^{-\omega x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Alors, les conditions initiales $f(0) = f'(1) = 0$ donnent :

$\begin{cases} A + B & = 0 \\ A\omega\,\mathrm{e}^{\omega} - B\omega\,\mathrm{e}^{-\omega} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B & = 0 \\ A & = 0 \end{cases}$, soit $f = 0$, ce qui est impossible.

Conclusion : les valeurs propres de T sont strictement positives.

8.2. *Déterminer les valeurs propres de T.*

Comme $\lambda > 0$, $\exists\, \omega \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$ et les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

Les conditions $f(0) = f'(1) = 0$ imposent $A = 0$ et $B\,\omega\cos(\omega) = 0$.

Ainsi, les valeurs de ω qui conviennent sont les $\omega_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ et les valeurs propres sont des réels $\lambda_k = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Le calcul effectué permet de vérifier que l'on obtient bien ainsi toutes les valeurs propres de T.

8.3. *Pour chaque valeur propre de T, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.*

Conclusion : les valeurs propres de T sont les $\lambda_k = \dfrac{4}{\pi^2 (2k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N}$ et les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles de base f_k définies par : $\forall\, x \in [0,1]$, $f_k(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}(2k+1)\,x\right)$.

EXERCICE 3

1. M est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable.

2. On note $U_X = X\,X^T$.

2.1. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, le coefficient d'indice (i, j) de U_X est $x_i x_j$.

De même que M, la matrice U_X est diagonalisable car symétrique réelle.

2.2. Toutes les colonnes sont un multiple de X et au moins une des colonnes est non nulle car X n'est pas le vecteur nul (car X et Y sont linéairement indépendants).

Le rang de U_X vaut 1 et on a $\mathrm{Im}(U_X) = \mathrm{Vect}(X)$.

2.3. Soit $Z \in \mathrm{Ker}(U_X)$. On a alors $U_X Z = 0$ donc $XX^\top Z = 0$. On a alors $X^\top XX^\top Z = 0$. Or $X^\top XX^\top Z = \|X\|^2 X^\top Z$ et $\|X\|^2 \neq 0$. On a donc $X^\top Z = 0$ et U_X est orthogonal à $\mathrm{Vect}(X)$.

On peut aussi exprimer l'appartenance au noyau. Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(U_X)$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_i x_j z_j = 0$. Comme X est non nul, il existe un entier i tel que $x_i \neq 0$, on a donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j z_j = 0$. On reconnaît alors le produit scalaire (X, Z). On a donc $(X, Z) = 0$ ce qui montre que les deux espaces sont orthogonaux.

2.4. Les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(U_X)$ et $\mathrm{Im}U_X$ sont orthogonaux, ils sont donc en somme directe. Par le théorème du rang, les deux espaces sont donc supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

2.5. On calcule U_X^2 : $U_X^2 = XX^\top XX^\top = \|X\|^2 XX^\top = \|X\|^2 U_X$. Un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X est $T(\lambda) = \lambda^2 - \|X\|^2\,\lambda$.

2.6. On note u_x l'endormorphisme canoniquement associé à U_X.

Dans une base adaptée à la somme directe $\mathrm{Ker}(U_X)\oplus\mathrm{Im}U_X$, la matrice est donc :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \|X\|^2 \end{pmatrix}$$

car $U_X X = XX^\top X = \|X\|^2 X$.

3. On a $M = I_n + \alpha U_X$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe une matrice inversible P telle que $U_X = PDP^{-1}$.

On a donc $M = PP^{-1} + \alpha PDP^{-1} = PD'P^{-1}$ avec $D' = I_n + \alpha D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1+\alpha\|X\|^2 \end{pmatrix}$

On en déduit que les valeurs propres de M sont 1 et $1 + \alpha\|X\|^2$.
On peut aussi prendre λ réel et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On a $MY = \lambda Y \Leftrightarrow Y + \alpha U_X Y = \lambda Y \Leftrightarrow \alpha U_X Y = (\lambda - 1)Y \Leftrightarrow U_X Y = \dfrac{\lambda-1}{\alpha} Y$ car $\alpha \neq 0$.
On a donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \Leftrightarrow \dfrac{\lambda-1}{\alpha} \in \mathrm{Sp}(U_X)$. Comme on a vu que $\mathrm{Sp}(U_X) = \{0, \|X\|^2\}$, on a $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 1 + \alpha\|X\|^2\}$ et M est semblable à D'.

4. On se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice M.

4.1. On note $F = \mathrm{Vect}(X, Y)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

4.1.1. On a $MX = X + \alpha U_X X + \beta U_Y X = X + \alpha\|X\|^2 X + \beta YY^\top X = (1 + \alpha\|X\|^2)X + \beta\,(X|Y)\,Y$

4.1.2. On a montré que $MX \in F$. De manière symétrique, on montre que $MY \in F$ donc F est stable par f.

4.2. D'après le cours, comme M est symétrique réelle et que c'est la matrice de f dans une base orthonormée, f est auto-adjoint. Donc, comme F est stable par f, on a aussi : $F^\perp$ est stable par f. Soit $Z \in F^\perp$, alors $(X, Z) = 0 = (Y, Z)$. On a

$$MZ = Z + (X, Z)\,X + (Y, Z)\,Y = Z$$

On en déduit que $f|_{F^\perp} = id_{F^\perp}$.

4.3. On note $G = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\,\|X\|^2 & \alpha\,(X|Y) \\ \beta\,(X|Y) & 1 + \beta\,\|Y\|^2 \end{pmatrix}$.

4.3.1. On a $MX = X + \alpha U_X X + \beta U_Y X = X + \alpha\|X\|^2 X + \beta\,(X, Y)\,Y$ d'après les calculs précédents. De même $MY = Y + \alpha\,(X, Y)\,X + \beta\|Y\|^2 Y$. La matrice G est donc bien la matrice de la restriction de f à F dans la base (X, Y).

4.3.2. Par l'absurde, si on suppose que la matrice G n'est pas diagonalisable, d'après **4.3.2**, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Donc M n'est pas diagonalisable, ce qui contredit la question **1.**. Donc G est diagonalisable.

4.3.3. En prenant une base $(Z_1, \dots, Z_{n-2})$ de $F^\perp$, dans la base $(X, Y, Z_1, \dots, Z_{n-2})$, base adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^\perp$, on a donc

$$\left(\begin{array}{c|c} G & O_{\mathscr{M}_{2,n-2}(\mathbb{R})} \\ \hline O_{\mathscr{M}_{n-2,2}(\mathbb{R})} & I_{n-2} \end{array}\right)$$

4.3.4. Notons $S = \begin{pmatrix} \alpha\,\|X\|^2 & \alpha\,(X|Y) \\ \beta\,(X|Y) & \beta\,\|Y\|^2 \end{pmatrix}$.

Alors,

$$\det(S - \lambda\, I_2) = \begin{vmatrix} \alpha\,\|X\|^2 - \lambda & \alpha\,(X|Y) \\ \beta\,(X|Y) & \beta\,\|Y\|^2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\left[\alpha\,\|X\|^2 + \beta\,\|Y\|^2\right] + \alpha\beta\left(\|X\|^2\|Y\|^2 - (X|Y)^2\right)$$

dont les racines sont $\mu_1 = \dfrac{1}{2}\left[(\alpha\,\|X\|^2 + \beta\,\|Y\|^2) + \sqrt{(\alpha\,\|X\|^2 - \beta\,\|Y\|^2)^2 + 4\,\alpha\beta\,(X|Y)^2}\right]$ et $\mu_2 = \dfrac{1}{2}\left[(\alpha\,\|X\|^2 + \beta\,\|Y\|^2) - \sqrt{(\alpha\,\|X\|^2 - \beta\,\|Y\|^2)^2 + 4\,\alpha\beta\,(X|Y)^2}\right]$

Il en résulte que les valeurs propres de G sont $\{1 + \mu_1, 1 + \mu_2\}$.

4.4. D'après les questions précédentes, les valeurs propres de la matrice M sont : 1 d'ordre $n - 2$, $1 + \mu_1$ et $1 + \mu_2$ toutes deux d'ordre 1.

EXERCICE 4

1. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

On pose, lorsque cette intégrale existe, $\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^{1/n}}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$.

1.1. Soit α un réel strictement positif.

1.1.1. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto (1+h)^\alpha$ est :

$$(1+h)^\alpha \underset{h\to 0}{=} 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + o\left(h^2\right)$$

1.1.2. *En déduire un équivalent, au voisinage de* 1*, de* $t \mapsto 1 - t^\alpha$.

D'après ce qui précède :

$$1 - (1+h)^\alpha \underset{h\to 0}{\sim} -\alpha h$$

On en déduit au voisinage de 1 :

$$1 - t^\alpha \underset{t\to 1}{\sim} -\alpha(t-1)$$

1.2. Soit β un réel.

D'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge, si, et seulement si, $\beta < 1$.

1.3. Soit $n \geqslant 2$.

La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1 - t^{1/n}}{(1-t)^{1+1/n}}$ est continue et positive sur $[0, 1[$.

On a : $h(t) \underset{t \to 1}{\sim} \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{(1-t)^{1/n}}$ et donc, d'après Riemann $\left(\dfrac{1}{n} < 1\right)$, l'intégrale γ_n existe.

2. Démonstration d'un encadrement

2.1. Démontrer que l'on a :

- Notons $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t - 1 - t$. φ est fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\varphi' : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ et le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$\searrow$		0		$\nearrow$

  On en déduit que pour tout réel t : $1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$,

- Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(t) = \mathrm{e}^t - 1 - t - \dfrac{t^2}{2}$.
  ψ est dérivable et sa fonction dérivée est φ qui est positive sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.
  ψ est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $\psi(0) = 0$ on en déduit :

$$\forall t \leqslant 0\ , \mathrm{e}^t \leqslant 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

2.2. On pose pour tout entier m et pour tout réel u : $U_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k\,!}$

Soit p un entier naturel non nul.

On suppose que : $\forall u \leqslant 0,\ U_{2p-1} \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p}$

2.2.1. *Démontrer qu'on a alors : $\forall u \leqslant 0,\ U_{2p+1} \leqslant e^u$*

Notons $\varphi(u) = \mathrm{e}^u - U_{2p+1}$. Alors $\varphi'(u) = \mathrm{e}^u - U_{2p} \leqslant 0$ d'après l'hypothèse.
Ainsi, φ décroît sur $\mathbb{R}_-$ et comme $\varphi(0) = 0$, on obtient $\varphi(u) \geqslant 0$ pour $u \leqslant 0$.

2.2.2. *Démontrer que l'on a également : $\forall u \leqslant 0,\ \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p+2}$.*

On procède de la même façon pour cette inégalité.
Notons $\psi(u) = \mathrm{e}^u - U_{2p}$. Alors $\psi'(u) = \mathrm{e}^u - U_{2p-1} \geqslant 0$ d'après l'hypothèse.
Ainsi, ψ croît sur $\mathbb{R}_-$ et comme $\psi(0) = 0$, on obtient $\psi(u) \leqslant 0$ pour $u \leqslant 0$.

2.3. *En déduire un encadrement de* e^u *lorsque u est un réel négatif ou nul.*

On procède par récurrence pour démontrer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_p$ = « $U_{2p-1} \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p}$ ».

- D'après la question **2.1**, pour tout réel u négatif : $U_1 \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant U_2$ ce qui assure l'**initialisation**.
- La question **2.2** démontre l'**hérédité** de la propriété.

- En **conclusion**, on en déduit que cette propriété est vraie pour tout entier p supérieur ou égal à 1.

3. D'après **2** :

$$\forall u \in \mathbb{R}_-,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{u^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant \sum_{k=0}^{2p} \frac{u^k}{k!}.$$

Or $\forall t \in]0,1[$ et $\forall n \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{n}\ln(t) < 0$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{2p-1} \frac{\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(t)} \leqslant \sum_{k=0}^{2p} \frac{\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k}{k!}.$$

Donc, par opérations usuelles :

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k \leqslant 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ \ln(t)\right) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k$$

4. Notons $g_p : t \mapsto \dfrac{(\ln(t))^p}{(1-t)^{1+1/n}}$.

Pour p fixé, la fonction g_p est continue et de signe constant sur $]0,1[$.

- Au voisinage de 0, on a : $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} (-1)^p\,(-\ln(t))^p$ et $\displaystyle\int_0^{1/2} (-\ln(t))^p\,\mathrm{d}t$ existe car $(\ln(t))^p = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

- Au voisinage de 1 on a : $g(t) \underset{t\to 1}{\sim} (-1)^p\,(1-t)^{p-1-1/n}$ et, pour $p > 1$, $p-1-\dfrac{1}{n} > -1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 (1-t)^{p-1-1/n}\,\mathrm{d}t$ existe.

Conclusion : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(t))^p}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$ existe.

5. En écrivant la double inégalité obtenue à la question **3** pour $p = 1$, en divisant par le réel strictement positif $(1-t)^{1+1/n}$ puis en intégrant entre 0 et 1 (ce que l'on vient de justifier), on obtient :

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln(t)^2)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$$

6. On a pour tout $t \in]0,1[$, pour tout $p \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \dfrac{(-\ln(t))^p}{(1-t)^{1+1/n}} \leqslant \dfrac{(-\ln(t))^p}{(1-t)^{3/2}}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{(-\ln(t))^p}{(1-t)^{3/2}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Le Théorème de convergence dominée nous permet d'obtenir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{(\ln(t))^p}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^p}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

7. On a :

$$\int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{(\ln(t)^2)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t \leqslant n\,\gamma_n \leqslant \int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$$

Il résulte alors de ce qui précède que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

8. *Prouver que, pour tout entier naturel p, l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\,t^p\,dt$ *existe.*

Si $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto -\ln(t)\,t^p$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 elle donc intégrable sur $]0,1]$.

Si $p = 0$, la fonction $t \mapsto -\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ puisque $\ln(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$

9. Par intégrations par parties d'une intégrale impropre (attention à vérifier la convergence du crochet), on a facilement : $\displaystyle\int_0^1 (-\ln(t))\,t^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}$.

10. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $f_p : t \mapsto -\ln(t)t^p$. f_p est continue par morceaux sur $]0,1]$ positive et intégrable sur $]0,1]$.

Pour tout $t \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} f_p(t) = -\ln(t)\sum_{p=0}^{N} t^p \underset{N\to+\infty}{\to} -\ln t \times \frac{1}{1-t}$.

$\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} f_p$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $S : t \mapsto \dfrac{-\ln(t)}{1-t}$ qui est continue par morceaux sur $]0,1[$.

De plus $\displaystyle\sum_{p=0}^{N}\int_0^1 |f_p(t)|\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(p+1)^2}$ qui converge (par critère de Riemann).

D'après le théorème d'intégration terme à terme :

$\displaystyle\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 f_p(t)\mathrm{d}t$ d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+p)^2}$

11. On en déduit alors que $n\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\to} \displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$, d'où $n\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{6} + o(1)$.

Soit : $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

* * * * *

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Tout d'abord, comme l'an dernier, les mêmes remarques générales :