2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n)\, Q(n)$.

2.1. Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.2. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 0} e^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.3. Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha\, 2^{-n}$.

Calculer S_0, S_1 et S_2.

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2**.

4.1. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.

4.2. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

FIN DU SUJET

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

5. Déjà, $\mathrm{Im}(L) \subset \mathbb{R}$. De plus, L est linéaire par linéarité de l'intégrale. Donc L est bien une forme linéaire sur E.

6. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$.

$$\begin{aligned} L(e_k) &= \int_{-1}^{1} t^k \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{k+1}(1-(-1)^{k+1}) \end{aligned}$$

donc $L(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{k+1} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$

7. Comme $L(e_0) \neq 0$, L est une forme linéaire non nulle. Donc $\mathrm{Ker}(L)$ est un hyperplan de E qui est de dimension $2n+1$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2n$.

8. D'une part, le vecteur e_1 est bien dans $\mathrm{Ker}(L)$ car 1 est impair. De plus, e_1 est un vecteur non nul, donc forme une famille libre de $\mathrm{Ker}(L)$ qui est de dimension finie. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille (e_1) en une base $\mathscr{U}$ de $\mathrm{Ker}(L)$.

9. i) Soit $P \in \mathrm{Ker}(L)$:

$$(e_0|P) = \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = L(P) = 0$$

donc $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont orthogonaux.

ii) Comme ces deux sous-espaces sont orthogonaux, ils sont en somme directe. Or, $\dim(\mathrm{Vect}(e_0)) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1 + 2n = \dim(E)$, donc $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

10. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda\, L(P)\, X$$

10.1. Soient $P, Q \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$T_\lambda(\mu P + Q) = (\mu P + Q) + \lambda\, L(\mu P + Q)\, X = \mu(P + \lambda\, L(P)\, X) + Q + \lambda\, L(Q)\, X$$

par linéarité de L. Donc T_λ est linéaire.
Puis, pour tout $P \in E$, $\deg(T_\lambda(P)) \leqslant \max(\deg(P), 1) \leqslant 2n$, car $n \neq 0$. Donc T_λ est bien un endomorphisme de E.

10.2. Soit $P \in E$.

$$(L \circ T_\lambda)(P) = L(P + \lambda\, L(P)\, X) = L(P)(1 + \lambda\, L(X)) = L(P).$$

car $X \in \mathrm{Ker}(L)$.

10.3. Notons M la matrice de taille $2n+1$ demandée :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.4. La matrice M étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Donc la seule valeur propre de T_λ est 1.

10.5. Si T_λ était diagonalisable, M serait semblable à l'identité. Or, la seule matrice semblable à l'identité est elle-même. Donc T_λ est diagonalisable si et seulement si $\lambda = 0$.

10.6. La matrice M est de déterminant 1 donc inversible, donc T_λ est un automorphisme de E.

10.7. Soit α et β deux réels, et $P \in E$.

$$T_\alpha \circ T_\beta(P) = T_\beta(P) + \alpha\, L(T_\beta(P))\, X = P + (\beta + \alpha)\, L(P)\, X$$

10.8. Avec la question précédente, on remarque que $T_{-\lambda} \circ T_\lambda = \mathrm{Id}_E$. Donc $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$.

EXERCICE 2

1. **1.1.** On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. On sait que $E(X) = V(X) = \lambda$

1.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

1.3. Deux variables aléatoires sont dites indépendantes pour tout $(x, y) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ on a $\mathbb{P}\left((X_1 = x) \cap (X_2 = y)\right) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = y)$. On peut aussi dire $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \mathcal{P}(X_2(\Omega)), \mathbb{P}\left((X_1 \in A) \cap (X_2 \in B)\right) = \mathbb{P}(X_2 \in A)\mathbb{P}(X_2 \in B)$

2. **2.1.** On a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et on a : $[Y = 0] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X = 2k]$ et $[Y = 1] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X = 2k + 1]$.

2.2. De la question précédente, on déduit :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)\,!} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda).$$

De même, $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda)$. On reconnaît une loi de Bernoulli, on a donc $E(Y) = e^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda)$.

3. Étude de la variable aléatoire T.

3.1. On a $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

3.2. On sait que les évènements $[Z = 1], [Z = 2]$ forment un système complet d'évènements. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}([Z = 1] \cap [T = k]) + \mathbb{P}([Z = 2] \cap [T = k]) \\ &= \mathbb{P}([Z = 1] \cap [X = k]) + \mathbb{P}([Z = 2] \cap [2X = k]) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(2X = k)\right)\end{aligned}$$

par indépendance.

3.3. De la question précédente, on déduit :

- Si $k = 2p$, alors $\mathbb{P}(T = 2p) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X = 2p) + \mathbb{P}(X = p)\right) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\dfrac{\lambda^{2p}}{(2p)\,!} + \dfrac{\lambda^p}{(p)\,!}\right]$
- Si $k = 2p + 1$, alors $\mathbb{P}(T = 2p + 1) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X = 2p + 1) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(2X = 2p + 1) =$
$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\dfrac{\lambda^{2p+1}}{(2p + 1)\,!}\right]$

3.4. L'évènement $A = [$"T prend des valeurs paires"$]$ s'écrit : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[T = 2k]$.

On a donc (réunion d'évènements incompatibles) :
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[T = 2k]\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T = 2k) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)\,!} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k}}{(k)\,!} =$
$\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2\lambda} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{ch}(\lambda) + e^{\lambda}\right)$.

EXERCICE 3

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme générique $a_n = \dfrac{\sin n^\alpha}{n}$, $n \geqslant 1$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{cases} x^2 \leq x \text{ si } x \in [0, 1] \\ x \leq x^2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. On pose pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin t^\alpha}{t}$.

2.1. La fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sa dérivée sur $[1, +\infty[$ est $t \mapsto \alpha t^{\alpha-1}\cos(t^\alpha)$.

2.2. φ est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $t \geqslant 1$, on a $\varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\,\sin(t^\alpha) + \alpha\,\dfrac{\cos(t^\alpha)}{t^{2-\alpha}}$.

2.3. Par inégalité triangulaire, pour tout $t \geqslant 1$, $|\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{\alpha}{t^{2-\alpha}}$.

2.4. Soit $n \geqslant 1$ et soit $t \in [n, n+1]$. On applique le théorème des accroissement finis entre t et n : Il existe $t_0 \in [n, n+1]$ tel que $|\varphi(t) - \varphi(n)| = |\varphi'(t_0)| \times |t - n|$. Or, d'après la question précédente, on a $|\varphi'(t_0)| \leq \dfrac{1 + \alpha t_0^\alpha}{t_0^2} = \dfrac{1}{t_0^2} + \dfrac{\alpha}{t_0^{2-\alpha}} \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ car $2 - \alpha > 0$.

3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

On a pour tout n : $u_n - a_n = \displaystyle\int_n^{n+1}[\varphi(t) - \varphi(n)]\,\mathrm{d}t$

et donc, par inégalité triangulaire et d'après la question précédente :

$$|u_n - a_n| \leqslant \int_n^{n+1}(t - n)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$$

4. 4.1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

4.2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Soit $X \in [1,+\infty[$. Le crochet $\left[-\dfrac{\cos(t)}{t}\right]_1^X$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, d'après la question précédente, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est bien intégrable.

On peut aussi écrire : Soit $X \in [1,+\infty[$.

Par une intégration par parties, $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Le crochet possède une limite finie lorsque X tend vers l'infini. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. En effectuant le changement de variable $u = t^\alpha$ (qui est C^1 et strictement croissant car $\alpha > 0$) les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge puisque sa somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_1^{n+1} \varphi(t)\mathrm{d}t$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

7. D'après la question **3.**, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n - a_n)$ converge absolument car $2-\alpha > 1$.

8. Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum(u_n - a_n)$ convergent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge en tant que différence de deux séries convergentes.

9. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ est convergente.

9.1. Puisque l'on a : $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leqslant \dfrac{|\sin(n^\alpha)|}{n}$ et d'après ce que l'on a supposé, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente par le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

9.2. Soit $X \in [1,+\infty[$, par une intégration par parties, on a

$$\int_1^X \frac{\cos(2x)}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{2x}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(2x)}{2x^2}\mathrm{d}x$$

Comme le crochet admet une limite finie, on en déduit que les deux intégrales sont de même nature. Or $\dfrac{\sin(2x)}{2x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est convergente. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

9.3. En utilisant alors la formule : $\dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos(2\,n^\alpha)}{2n}$ on obtient que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui est faux.

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ n'est pas absolument convergente

.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E.

On note : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

On a $|P(n)Q(n)2^{-n}| \sim |a_p b_q| n^{p+q} 2^{-n}$ et $|a_p b_q| n^{p+q} 2^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la série est donc absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, P(n)\, Q(n)$.

2.1. L'implication $\Leftarrow$ est claire. Soit S tel que $(S|S) = 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} S(n)^2 2^{-n} = 0$. La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} S(n)^2 2^{-n}$ est croissante, positive et de limite nulle, elle est donc nulle. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n)^2 2^{-n} = 0$ ce qui implique $S(n) = 0$. Le polynôme S admet une infinité de racines, il est donc nul.

2.2. L'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est symétrique, linéaire par rapport à la première coordonnée donc bilinéaire.
Pour tout $S \in E$, $\sum_{n\geq 0} S(n)^2 2^{-n}$ est une série convergente à termes positifs, sa somme est donc positive. On a montré à la question précédente, que la forme était, de plus, définie positive. On définit donc bien un produit scalaire sur E.

3. **3.1.** La fonction f est définie sur $]-1, 1[$ et sa somme vaut $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$.

3.2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrit $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, la série est donc convergente lorsque e^{-x} appartient à $]-1, 1[$ c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+^\star$.

3.3. Soit g la fonction définie par $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, on a alors $g(x) = f(e^{-x})$. La fonction f est C^∞ à l'intérieur de son intervalle ouvert de convergence et pour tout $x > 0$, on a $e^{-x} \in]-1, 1[$, g est donc C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition.

3.4. Soit $x > 0$. On a $g(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$ donc $g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ et $g''(x) = \dfrac{e^{-x}+e^{-2x}}{(1-e^{-x})^3}$.

On peut aussi écrire $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$, on a alors $g'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$ puis $g''(x) = \dfrac{e^{2x}+e^x}{(e^x-1)^3}$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha \, 2^{-n}$.

On remarque que $S_0 = g(\ln 2)$, $S_1 = -g'(\ln 2)$ et $S_2 = g''(\ln 2)$. En utilisant les expressions trouvées à la question précédente, on obtient $S_0 = 2, S_1 = 2$ et $S_2 = 6$.

On peut aussi utiliser f. On a $S_0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $S_1 = \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $S_2 = \frac{1}{4}f''\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 6$.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2**.

4.1. On a

$$\begin{aligned}(X^2 - aX - b|1) = 0 = (X^2 - aX - b, X) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - an - b}{2^n} = 0 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - an^2 - bn}{2^n} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 6a + 2b = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

$X^2 - 5X + 2$ est donc orthogonal à 1 et à X.

4.2. L'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2, \ (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ ||X^2 - P||^2, \ P \in \mathbb{R}_1[X] \right\}$ possède un minimum car $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie et ce minimum est le carré de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$. Il est réalisé en le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Or, on a vu à la question précédente que le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $5X - 2$, on a donc

$$\min \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2, \ (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = ||X^2 - 5X + 2||^2$$

4.3. D'après Pythagore, on a

$$||X^2 - 5X + 2||^2 + ||5X - 2||^2 = ||X^2||^2$$

On a donc

$$||X^2 - 5X + 2||^2 = ||X^2||^2 - ||5X - 2||^2 = S_4 - (25S_2 - 20S_1 + 4S_0) = 150 - 150 + 40 - 8 = 32$$

La distance recherchée est $4\sqrt{2}$.

* * * * *