7.4. La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

8. Soit α un réel strictement positif.

On note h_α la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha} f_1\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

8.1. Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.

8.2. Vérifier que l'on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

8.3. Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}(h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9. Étude d'une norme subordonnée

9.1. Montrer que pour tout h dans E : $\|h \star g\|_\infty \leqslant \|g\|_1\, \|h\|_\infty$.

9.2. Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|.\|_\infty)$ qui à tout h associe $h \star g$ est continu.

9.3. En déduire une majoration de $|||\Phi|||$ (norme subordonnée de Φ).

10. On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété :

$$\exists A > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, x \ \text{ vérifiant } \ |x| \geqslant A,\ \ f(x) = 0$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

FIN DU SUJET

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

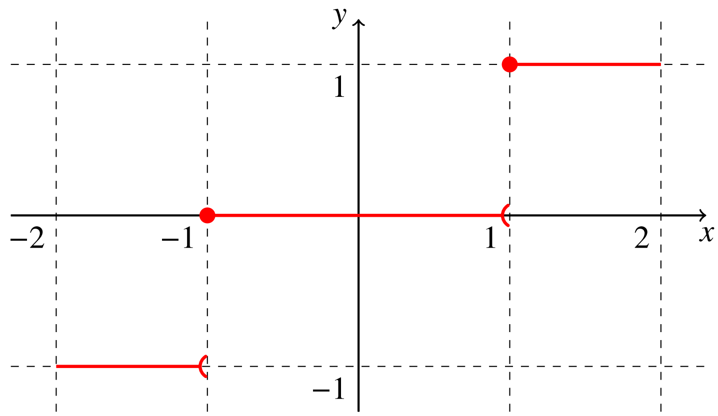
Pour tout réel x, on rappelle que la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$k \leqslant x < k+1$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y, la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$$

1. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.



2. *Déterminer $Y(\Omega)$.*
   $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc :
   • si $X = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{X+1}{2} = m + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $Y = m + 1$.
   • si $X = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors $Y = m$.
   Ainsi : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
3. *Soit k un entier naturel non nul.*
   Écrire l'événement $(Y = k)$ à l'aide d'événements $(X = j)$ où j est un entier naturel non nul.
   On a : $(Y = k) = \left(k \leqslant \dfrac{X+1}{2} < k+1\right) = (2k-1 \leqslant X < 2k+1) = (X = 2k-1) \cup (X = 2k)$.
4. *Déterminer la loi de Y.*
   Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(k \leqslant \dfrac{X+1}{2} < k+1\right) = \mathbb{P}(2k-1 \leqslant X \leqslant 2k) = pq^{2k-2}(1+q) = (1-q^2)(q^2)^{k-1}$ où $q = 1 - p$, car $(X = 2k-1)$ et $(X = 2k)$ sont disjoints.
   Finalement, Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

EXERCICE 2

1. **Question préliminaire**
   En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
   Supposons que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On a $\cos(2n) \to 0$ donc, par unicité de la limite, on a $0 = -1$. On aboutit à une contradiction donc $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
   On peut aussi raisonner ainsi : supposons que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.
   Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2n) = \ell$ et comme $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$, il vient $\ell = 2\ell^2 - 1$, c'est-à-dire $\ell = 1$ ou $\ell = \dfrac{1}{2}$: la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n\, x^n$ *où :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n = \frac{\cos(n)}{n}$$

On note R son rayon de convergence.

2. *Montrer que $R \geqslant 1$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ étant égal à 1 (à justifier), on obtient d'après le cours : $R \geqslant 1$.

3. *Prouver que la série de terme général* $\cos(n)$ *diverge.*

D'après la question **1.** $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et donc, la série $\sum_{n\geqslant 1} \cos(n)$ diverge grossièrement.

4. *En déduire la valeur de R.*

On en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} na_n\, x^n$ diverge pour $x = 1$. Comme les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum na_n x^n$ ont même rayon de convergence, on a donc que $R \leqslant 1$.
En conclusion, $R = 1$.

On note alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n}\, x^n$

5. *Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\, x^n$ *où i désigne le nombre complexe usuel tel que* $\mathrm{i}^2 = -1$.

Il s'agit d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\, x$.
Elle converge si, et seulement si $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\, x| = |x| < 1$.
On en déduit que la rayon de convergence demandé vaut 1.
Alors, pour tout x tel que $|x| < 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\, x^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\, x}$

6. *En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.*

On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, on peut dériver terme à terme et donc,

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n+1)\, x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)}\, x^n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\, x}\right).$$

ce qui donne : $\forall\, x \in]-1,1[,\ f'(x) = \dfrac{\cos(1) - x}{1 - 2\,\cos(1)\, x + x^2}$.

7. *Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.*

On constate que $\forall\, x \in]-1,1[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{2}\,\varphi'(x)$ où $\varphi(x) = \ln(1 - 2\,\cos(1)\, x + x^2)$

Il existe donc une constante C réelle telle que : $\forall\, x \in]-1,1[,\ f(x) = -\dfrac{1}{2}\,\varphi(x) + C$.

Comme $f(0) = \varphi(0) = 0$, on obtient que $C = 0$ et ainsi :

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ f(x) = -\frac{1}{2}\,\ln(1 - 2\,\cos(1)\, x + x^2).$$

8. *En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$.

On écrit $\cos^2\left(\dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{\cos(n)+1}{2}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n = \dfrac{\cos(n)}{2n} x^n + \dfrac{x^n}{2n}$.

Comme les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n)}{2n} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{2n}$ ont le même rayon de convergence 1, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$ a aussi un rayon de convergence qui vaut 1.

De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \dfrac{1}{2} f(x) - \dfrac{1}{2} \ln(1-x)$.

EXERCICE 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la matrice transposée de la matrice A.

1. *Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.*

   On remarque que : $B = A(3A^2 - A - I_n) = AA^\top$ et donc, $B^\top = (AA^\top)^\top = AA^\top$, ce qui prouve bien que la matrice B est symétrique réelle.

   Il en résulte que la matrice B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque symétrique réelle.

2. *Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.*

   D'après le théorème spectral, les valeurs propres de B sont réelles.

   On suit l'indication de l'énoncé : soit Y un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

   $Y^\top BY = Y^\top A^\top AY = (AY)^\top (AY) = \|AY\|^2$.

   Si Y est un vecteur propre (donc non nul) de B pour une valeur propre λ, on a : $BY = \lambda Y$ et donc, $Y^\top BY = \lambda \|Y\|^2$.

   Finalement : $\lambda \|Y\|^2 = \|AY\|^2$, ce qui prouve ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3. *Montrer que l'on a : $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n$.*

   Évident d'après les hypothèses de l'énoncé.

4. *En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.*

   On en déduit que $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n = 3(3A^2 - A - I_n)^2 - (3A^2 - A - I_n) - I_n$

   soit $(3A^2 - A - I_n)^2 - A^2 = O_n$ ou encore $(3A^2 - 2A - I_n)(3A^2 - I_n) = O_n$.

   Il en résulte que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.

5. *Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.*

   Si un polynôme Q annule A, alors par transposition, il annule $A^\top$.

   Comme P annule A, $\dfrac{1}{9} P$ est unitaire et annule $A^\top$.

6. *Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*

   Le polynôme P se décompose de la façon : $P(X) = (X-1)(3X+1)(X\sqrt{3}+1)(X\sqrt{3}-1)$.

7. *La matrice A est-elle inversible ?*

   0 n'est pas racine de P et donc, la matrice A est inversible.

8. *Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.*

Puisque le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples : la matrice A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

9. *Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Montrer que V est aussi vecteur propre de $A^\top$.*

On a : $A\,V = \lambda\,V$ et par suite, $A^2\,V = \lambda^2\,V$.

Ainsi, puisque $A^\top = 3\,A^2 - A - I_n$, il vient : $A^\top\,V = 3\,A^2\,V - A\,V - V = (3\lambda^2 - \lambda - 1)\,V$, ce qui prouve que V est aussi un vecteur propre de $A^\top$ pour la valeur propre $3\lambda^2 - \lambda - 1$.

10. *On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.*

On appelle $\mathscr{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\quad L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

10.1. *Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.*

Le polynôme L_1 vérifie : $L_1(1) = 1, L_1\left(-\dfrac{1}{3}\right) = L_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = L_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, ce qui donne, après calculs : $L_1(X) = \dfrac{\left(X+\frac{1}{3}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \dfrac{9}{8}\left(X-\dfrac{1}{3}\right)\left(X-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

10.2. *Vérifier que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Soit $(\beta_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ des scalaires tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \beta_i\,L_i = 0$.

Alors, pour tout $j \in [\![1,4]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \beta_i\,L_i(\alpha_j) = 0$, soit $\beta_j = 0$ et la famille $\mathscr{L}$ est libre.

Comme son cardinal vaut $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, la famille $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

10.3. *Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base $\mathscr{L}$.*

Comme la famille $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, il existe une unique famille $(\zeta_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de scalaires tels que : $R = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \zeta_i\,L_i$.

Alors, pour tout $j \in [\![1,4]\!]$, on peut écrire : $R(\alpha_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \zeta_i\,L_i(\alpha_j) = \zeta_j$.

On en déduit que $R = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} R(\alpha_i)\,L_i$.

11. Étude de A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. *Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base $\mathscr{L}$.*

Soient Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P : $X^k = Q\,P + R$ avec $R \in \mathbb{R}_3[X]$.

On en déduit immédiatement : $\begin{cases} R(1) = 1 \\ R\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k \\ R\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \\ R\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \end{cases}$

et donc, $R = L_1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k L_2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_3 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_4$.

11.1.2. *En déduire une expression de A^k.*

Comme $P(A) = O_n$, on en déduit en appliquant à la matrice A :

$A^k = L_1(A) + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k L_2(A) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_3(A) + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_4(A)$

11.2. *Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.*
Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A.

On fait alors tendre k vers l'infini, ce qui donne :

$\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = L_1(A) = \dfrac{9}{8}\left(A + \dfrac{1}{3}I_n\right)\left(A - \dfrac{\sqrt{3}}{3}I_n\right)\left(A + \dfrac{\sqrt{3}}{3}I_n\right)$.

• Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Ker}\left(A + \dfrac{1}{3}\,I_n\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(A - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,I_n\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(A + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,I_n\right)$, la matrice $L_1(A)$ est la matrice de la projection sur $\operatorname{Ker}(A-I_n)$ parallèlement à la somme directe $\operatorname{Ker}\left(A + \dfrac{1}{3}\,I_n\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(A - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,I_n\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(A + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,I_n\right)$.

• On peut aussi dire que $(L_1(A))^2 = \lim\limits_{k\to+\infty} A^{2k} = L_1(A)$ puisque la suite $(A^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite convergente $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers $L_1(A)$.

EXERCICE 4

Questions préliminaires

1. *Démontrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un segment J est lipschitzienne sur J.*
   Soit donc f une fonction f de classe C^1 sur un segment J.
   Alors f' est continue sur ce segment et par suite, elle y est bornée :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall\, x \in J,\ |f'(x)| \leqslant M$$

   Alors, d'après le Théorème des Accroissements Finis, pour tout couple $(x, y) \in J^2$, $\exists\, c \in J$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x)$ et par suite : $|f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|$, ce qui prouve que f est $M-$lipschitzienne.
2. *Démontrer qu'une fonction $k-$lipschitzienne sur un intervalle J est uniformément continue sur cet intervalle.*
   Soient f une fonction $k-$lipschitzienne sur un intervalle J et ε un réel strictement positif.
   En posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$, on peut écrire : $\forall\,(x, y) \in J^2,\ |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant k\,\eta \leqslant \varepsilon$
   et f est uniformément continue sur J.

*****

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et bornées et F l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$.
On rappelle que : $\forall\, g \in F$, $\|g\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\forall\, f \in E$, $\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ définissent des normes respectivement sur les espaces F et E.

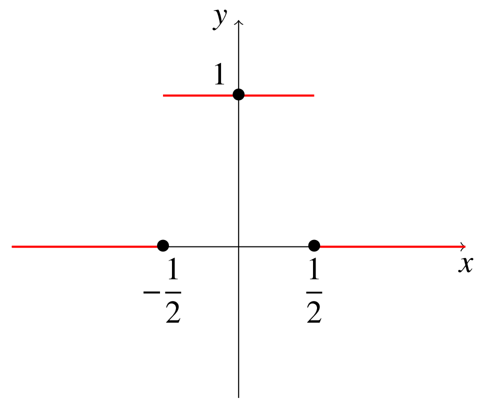
Soient $g \in F$ et $f \in E$.

3. *Montrer que la fonction :*

$$x \longmapsto (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

   est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   On a aussi la majoration : $\forall t \in \mathbb{R}, |f(x-t)g(t)| \leqslant \|f\|_\infty.|g(t)|$.
   Comme g est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \|f\|_\infty.|g(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Il en résulte que la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite, l'existence de $(f \star g)(x)$ pour tout x réel.
4. *Démontrer que $f \star g = g \star f$.*
   Par un changement de variable affine simple $u = x - t$, on vérifie que $f \star g = g \star f$.
5. *On pose* $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & si\quad x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0 & sinon \end{cases}$

5.1. *Représenter la fonction f_1 dans un repère orthonormal.*



5.2. *La fonction f_1 est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*

La fonction f_1 n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (discontinuités en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$). Elle est cependant continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

6. Étude de $f_1 \star g$

6.1. *Montrer que $f_1 \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.*

Comme $f_1 \in E$ la fonction $f_1 \star g$ existe pour tout x réel.

6.2. *Si g est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, prouver que la fonction $f_1 \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Soient g une fonction k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et x, y deux réels.

$(f_1 \star g)(y) - (f_1 \star g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,(g(y-t) - g(x-t))\,\mathrm{d}t$

Ainsi : $|(f_1 \star g)(y) - (f_1 \star g)(x)| \leqslant k\,|y-x| \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|\,\mathrm{d}t = k\,|y-x|$

et la fonction $f_1 \star g$ est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et par suite uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

6.3. *Démontrer que pour tout x réel :*

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u)\,\mathrm{d}u$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(f_1 \star g)(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} g(x-t)\mathrm{d}t = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u)\mathrm{d}u$.

6.4. *Si g est continue sur $\mathbb{R}$, prouver que $f_1 \star g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.*

Notons G est une primitive de la fonction continue g sur $\mathbb{R}$.

Alors $(f_1 \star g)(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} g(x-t)\mathrm{d}t = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u)\mathrm{d}u = G(x+1/2) - G(x-1/2)$.

Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, alors G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et il en est donc de même de $f_1 \star g$.

De plus, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(f_1 \star g)'(x) = g(x+1/2) - g(x-1/2)$.

7. Étude de $f_1 \star f_1$

7.1. *Justifier que $f_1 \star f_1$ existe.*

Comme $f_1 \in E \cap F$, $f_1 \star f_1$ existe.

7.2. *Déterminer l'expression de $(f_1 \star f_1)(x)$ suivant les valeurs du réel x.*

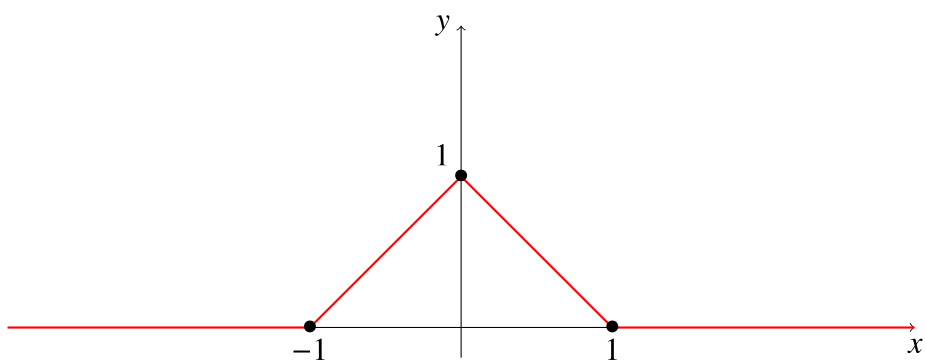
Soit x un réel. $(f_1 \star f_1)(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} f_1(x-t)dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} f_1(u)du$.

On considère 4 cas et on note $I_x = \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right]$.

- Si $I_x \subset \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ i.e. $x > 1$, alors $(f_1 \star f_1)(x) = 0$.
- Si $I_x \subset \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ i.e. $x < -1$, alors $(f_1 \star f_1)(x) = 0$.
- Si $x - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ i.e. $x \in [-1, 0]$ alors $(f_1 \star f_1)(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{x+\frac{1}{2}} dt = x + 1$.
- Si $-\frac{1}{2} \leqslant x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} < x + \frac{1}{2}$ i.e. $x \in [0, 1]$ alors $(f_1 \star f_1)(x) = \displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = 1 - x$.

On peut remarquer que $f_1 \star f_1$ est continue.

7.3. *Représenter la fonction $f_1 \star f_1$ dans un repère orthonormal.*



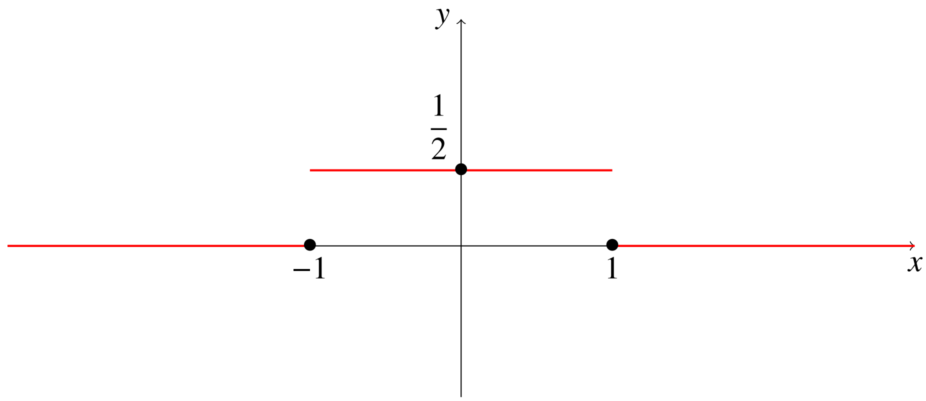
7.4. *La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*

Cf la dernière remarque de la question **7.2.**

8. *Soit α un réel strictement positif.*

On note h_α la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha} f_1\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

8.1. *Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.*



8.2. *Vérifier que l'on a :* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Facilement, on a par le changement de variable affine $t = \dfrac{x}{\alpha}$:

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\alpha(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}} f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_1(t)\mathrm{d}t = 1$

On peut aussi dire que l'aire du rectangle sur le graphe précédent vaut 1 donc l'intégrale recherchée est bien égale à 1.

8.3. *Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.*

Montrer que : $\lim\limits_{\alpha\to 0}(h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

On a : $(h_\alpha \star g)(x_0) - g(x_0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\alpha(t)\,(g(x_0 - t) - g(x_0))\,\mathrm{d}t.$

Donc $(h_\alpha \star g)(x_0) - g(x_0) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (g(x_0 - t) - g(x_0))\,\mathrm{d}t.$

g étant continue en x_0, on a : $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\beta > 0, \forall\, y \in \mathbb{R}, |y - x_0| \leqslant \beta \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon.$

Alors, pour tout $\alpha \in]0, 2\beta[$, en prenant $y = x_0 - t$, on a :

$$|y - x_0| = |t| \leqslant \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |g(x_0 - t) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

D'où $|(h_\alpha \star g)(x_0) - g(x_0)| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$

Et finalement, on a bien démontré que : $\lim\limits_{\alpha\to 0}(f_1 \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9. Étude d'une norme subordonnée

9.1. *Montrer que pour tout h dans E :* $\|h \star g\|_\infty \leqslant \|g\|_1\,\|h\|_\infty$.

On a : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, |h(x - t)g_1(t)| \leqslant \|h\|_\infty\,|g(t)|$.

Donc en intégrant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(h \star g)(x) \leqslant \|h\|_\infty \|g\|_1$ d'où $\|h \star g\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty \|g\|_1$.

9.2. *Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|.\|_\infty)$ qui à tout h associe $h \star g$ est continu.*

L'application Φ étant linéaire, l'inégalité de la question précédente prouve sa continuité.

9.3. *En déduire une majoration de $|||\Phi|||$ (norme subordonnée de Φ).*

Toujours la même inégalité donne $|||\Phi||| \leqslant \|g\|_1$.

10. *On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété :*

$$\exists A > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, x \ \text{ vérifiant } \ |x| \geqslant A,\ f(x) = 0$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (f \star g)(x) = \displaystyle\int_{x-A}^{x+A} f(x-t)g(t)dt$.

Donc $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, (f \star g)(x) - (f \star g)(y) = \displaystyle\int_{x-A}^{x+A} f(x-t)g(t)dt - \int_{y-A}^{y+A} f(y-t)g(t)\mathrm{d}t$.

D'après la relation de Chasles, Attention, on a du $f(x-t)$ et du $f(y-t)$

$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, (f \star g)(x) - (f \star g)(y) = \displaystyle\int_{x-A}^{y-A} f(x-t)g(t)dt + \int_{y+A}^{x+A} f(y-t)g(t)dt$.

Les fonctions et g étant bornées, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, |(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| \leqslant 2\|f\|_\infty \|g\|_\infty . |x-y|$.

La fonction $f \star g$ est lipschitzienne, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

* * * * *

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Tout d'abord, comme l'an dernier, les mêmes remarques générales :

- Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

Nous nous interrogeons d'ailleurs sur l'opportunité de mettre des points de présentation.

- Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.
- De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent le « le théorème spectrale » etc.
- Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
- Notons que nous avons de nouveau rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
- Signalons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre