Éléments de correction

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ p_{ij} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} p_{ij} = 1$ ce qui équivaut à $\alpha = 2^{-2n}$.
2. La formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $([Y = j])_{j\in[\![1,n+1]\!]}$ permet d'obtenir les lois marginales :

$$\forall\, i \in [\![1, n+1]\!], \mathbb{P}([X = i]) = \sum_{j\in[\![1,n+1]\!]} \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = 2^{-n}\binom{n}{i-1}.$$

   Il en va de même pour la loi de Y par symétrie.
3. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i])\,\mathbb{P}([Y = j])$ et donc, les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
4. On considère la variable aléatoire $Z = X - 1$, alors $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout i de $[\![0, n]\!]$, on a $\mathbb{P}([Z = i]) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}$. Z suit donc une loi binomiale de paramètre $p = \frac{1}{2}$, son espérance est $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$ et par linéarité de l'espérance, on en déduit $\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{n}{2}$.
   La variance de Z et de X est alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$.
5. On a : $b_{ij} = \dfrac{\mathbb{P}([Y = i] \cap [X = j])}{\mathbb{P}([X = j])} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{i-1}$.

   On en déduit que les colonnes de B sont toutes identiques à $C = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.
6. La matrice B est donc de rang 1 : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect}(C)$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension n : c'est donc l'hyperplan de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ qui a pour équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 0$.
7. On a $B = CL$ avec $L = (1, 1, \ldots, 1)$.

8. Calculer B^2.

En utilisant le cours, le terme générique de B^2 est $\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$.

On en déduit que $B^2 = B$.

Or $\operatorname{tr}(B)=\sum_{i=1}^{n+1} b_{ii}=\sum_{i=0}^{n+1}\mathbb{P}([X=i])=1$, on a donc bien $B^2=\operatorname{tr}(B)B$.

9. On déduit de ce qui précède que la matrice B est la matrice d'un projecteur d'un espace de dimension $n+1$.

Ses valeurs propres sont 0 (d'ordre n) et 1 d'ordre 1.

La matrice B est diagonalisable.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. L'identité de Bernoulli permet d'écrire :

$$X^{n+1}-1=(X-1)\left(1+X+X^2+\ldots+X^n\right)$$

Le reste de la division est nul et le quotient est le polynôme : $1+X+X^2+\ldots+X^n$.

2. Pour tout réel x de $]-1,1[$, on a : $\sum_{n\geqslant 0} x^n=\frac{1}{1-x}$.

* * * * * *

3. Étude d'une suite.

3.1. Soit n un entier naturel, la fonction $t\mapsto\frac{1-t}{1-t^{n+1}}$ est continue sur $[0,1[$ et prolongeable par continuité en 1 :

$$\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{1-t^{n+1}}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{1+t+\ldots+t^n}=\frac{1}{n+1}$$

L'intégrale $\int_0^1\frac{1-t}{1-t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ converge.

3.2. On pose, pour $n\geqslant 1$, $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

On a :

$$0\leqslant u_n-\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+2}$$

La suite u converge vers $\ell=\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$.

Autre méthode. Posons $f_n(t) = \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I = [0,1[$. Pour tout n, f_n est continue (par morceaux) et la suite (f_n) converge (simplement) vers $f : t \mapsto 1-t$ qui est continue par morceaux. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) = 1$$

Et φ est une fonction (continue par morceaux) intégrable sur I. Donc les f_n sont intégrables sur I (on le sait déjà) ainsi que f et :

$$\lim u_n = \lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \frac{1}{2}$$

4. Étude de la série de terme général $u_n - \ell$

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul p, et tout réel $t \in [0,1]$, on pose $g_p(t) = (1-t)\,t^{p(n+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{p \geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.

La série $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p(1)$ converge (clairement) vers 0.

Pour $t \in [0,1[$, la série géométrique $\sum\limits_{p\geqslant 1} t^{p(n+1)}$ converge vers $\dfrac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}$.

La série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ converge (simplement) sur $[0,1]$ vers g définie par :

$$g(t) = \frac{(1-t)t^{n+1}}{1-t^{n+1}} \text{ si } t \in [0,1[\quad \text{et } g(1) = 0$$

4.2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.

$$\int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p(n+1)+1} - \frac{1}{p(n+1)+2} = \frac{1}{(p(n+1)+2)\,(p(n+1)+1)} \sim \frac{1}{(n+1)^2p^2}$$

4.3. En utilisant la série de fonctions définie au **4.1** démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)\,((n+1)p+1)}.$$

D'après ce qui précède :

$$u_n - \ell = u_n - \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $p \geqslant 1$, la fonction g_p est continue (par morceaux) sur $I = [0, 1[$ intégrable (g_p est continue sur $[0, 1]$ (et positive !)) de plus :

$$\int_0^1 |g_p| \sim \frac{1}{(n+1)^2 p^2}$$

Or $\sum_p \frac{1}{(n+1)^2 p^2}$ est une série (à termes positifs) convergente donc la série $\sum_p \int_0^1 |g_p|$ converge.
D'après le théorème de convergence terme à terme :

$$u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)\,((n+1)p+1)}$$

4.4. Pour tout p entier naturel, on pose $h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)\,((t+1)p+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $t \geqslant 0$:

$$0 \leqslant h_p(t) \leqslant \frac{t^2}{(t+1)^2 p^2} \leqslant \frac{1}{p^2}$$

La série $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

4.5. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On admettra que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La série $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{+\infty} h_p = \frac{1}{p^2}$$

D'après le théorème de la double limite, la série $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^2}$ converge et :

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi :

$$n^2(u_n - \ell) = \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n) = \frac{\pi^2}{6} + o(1) \quad \text{et } u_n = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

EXERCICE 3

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et on rappelle que :

$$\forall (M, N) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2, \ \ (M\,N)^\top = N^\top\,M^\top$$

L'espace $E = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall (X, Y) \in E^2\,, \ \ (X|Y) = X^\top\,Y$$

et pour tout vecteur X de E, sa norme est notée $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$.
Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1.
On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est de type n lorsque $A^\top = A^n$.

1. **Quelques exemples**

   1.1. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 0.
   L'ensemble des matrices de type 0 est $\left\{I_p\right\}$.

   1.2. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1.
   Par définition, l'ensemble des matrices de type 1 est l'ensemble (espace) $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

   1.3. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type -1.
   Par définition, l'ensemble des matrices de type -1 est l'ensemble $\mathscr{O}_p(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales.
   En donner un exemple différent de la matrice identité lorsque $p = 4$.
   $-I_4$ convient.

   On suppose désormais que n **est supérieur ou égal à 1**.

2. **Dans cette question et dans cette question uniquement**, on prend $p = 3$ et pour tout réel θ, on note :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   2.1. Démontrer que l'on a : $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $(A(\theta))^m = A(m\,\theta)$.
   Récurrence immédiate mais à faire avec l'aide des formules d'addition pour les fonctions sin et cos !

   2.2. Déterminer alors l'ensemble des réels θ tels que $A(\theta)$ soit une matrice de type n.
   En remarquant $A^\top(\theta) = A(-\theta)$, on a :

$$A^\top(\theta) = A(\theta)^n \iff A((n+1)\theta) = I_p \iff (n+1)\theta \equiv 0\ [2\pi]$$

   L'ensemble des réels θ pour lesquels $A(\theta)$ est une matrice de type n est $\left\{\dfrac{2k\pi}{n+1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

   On revient au cas général : $p \geqslant 3$**.**

3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type n.

3.1. Établir l'égalité : $A^{n^2} = A$.

On a :

$$A^{n^2} = (A^\top)^n = (A^n)^\top = (A^\top)^\top = A$$

3.2. On note $B = A^{n+1}$.

3.2.1. Montrer que $B^n = B$.

On a :

$$B^n = A^{n^2+n} = A^{n+1} = B$$

3.2.2. Démontrer que B est une matrice symétrique.

On a :

$$B^\top = (A^{n+1})^\top = (A^\top)^{n+1} = (A^n)^{n+1} = \left(A^{n+1}\right)^n = B^n = B$$

B est symétrique.

3.2.3. Prouver que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.

On pourra examiner $X^\top BX$ où X est un vecteur quelconque de E.

Pour X dans E :

$$X^\top BX = X^\top A^{n+1}X = X^\top A^\top AX = (AX)^\top AX = ||AX||^2$$

En particulier, si X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ, on obtient (X n'étant pas nul) :

$$X^\top BX = \lambda||X||^2 = ||AX||^2 \quad \text{donc } \lambda = \frac{||AX||^2}{||X||^2} \in \mathbb{R}_+$$

Les valeurs propres de B sont (réelles) positives ou nulles.

3.2.4. Déterminer les valeurs propres de la matrice (B), lorsque B n'est ni la matrice nulle ni la matrice identité.

D'après la question **3.**(**3.2.**)**3.2.1.**, les valeurs propres de B sont racines de son polynôme annulateur $X^n - X$ et sont réelles positives.

Les valeurs propres de B appartiennent à $\{0, 1\}$. Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisable.

Si sa seule valeur propre était 0, ce serait la matrice nulle et si 1 était sa seule valeur propre, ce serait la matrice identité. Donc ses valeurs propres sont 0 et 1.

3.2.5. Prouver que B est une matrice de projection orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques.

B est symétrique réelle donc diagonalisable. Vues ses valeurs propres, B est semblable à la matrice $C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{p-r} \end{pmatrix}$ où r est le rang de C donc de B.

On a $C^2 = C$ donc C et B sont des matrices de projection.

D'après le théorème spectral, les sous espaces propres de B (qui sont $\ker(B)$ et $\mathrm{Im}(B)$) sont orthogonaux. Donc B est la matrice d'une projection orthogonale.
(Si $r = 0$, B est nulle et, si $r = p$, B est semblable à I_p donc $B = I_p$ et le résultat précédent reste valable).

3.3. Prouver que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.
Comme $B = A^{n+1}$, le noyau de A est contenu dans celui de B.
Pour X dans $\ker(B)$, on a :

$$X^\top BX = \|AX\|^2 = 0$$

d'après la question **3.(3.2.)3.2.3.**. Donc, X est dans $\ker(A)$.
Donc $\ker(A) = \ker(B)$.

3.4. Démontrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.
Comme $B = A^{n+1}$, l'image de B est contenue dans celle de A.
Comme $A^{n^2} = A$, l'image de A est contenue dans l'image de $B = A^{n+1}$ puisque $n^2 \geqslant n + 1$ (pour $n \geqslant -1$).
Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

3.5. Prouver que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.
Comme B est la matrice d'une projection orthogonale, $\ker(B)$ est l'orthogonal de $\mathrm{Im}(B)$. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3.6. Démontrer que l'on a : $\forall X \in \mathrm{Im}(A), \|AX\| = \|X\|$.
Pour X dans $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$, on a $BX = X$ car B est la matrice d'une projection.
Donc, d'après la question **3.(3.2.)3.2.3.** :

$$\|X\|^2 = X^\top BX = \|AX\|^2$$

3.7. Prouver que si A est de plus inversible, alors A est aussi de type -1.
Si A est inversible, alors $B = A^{n+1}$ l'est aussi et, en tant que matrice d'une projection, $B = I_p$ d'où :

$$A^n = A^{-1} \quad \text{i.e. } A^\top = A^{-1}$$

Si A est inversible, alors A est aussi de type -1.

4. Prouver enfin que si A est à la fois de type n et de type $n + 1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.
Si A est de type n et $n + 1$, alors :

$$B = A^\top = A^{n+1} = A^n A = A^\top A$$

$A^\top$ est symétrique donc A également. Et $B = A^\top = A$.
Donc $A = B$ est la matrice d'un projecteur orthogonal (puisque A est de type n).

EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

Questions de cours

1. Pour tout θ dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est de module 1 et d'argument θ (modulo 2π).

2. Pour t réel et n entier :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\pi+t)} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = (-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

En prenant la partie imaginaire :

$$\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$$

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

3.1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge.

$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ est une série alternée vérifiant le théorème idoine donc converge.

3.2. Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum_{n\geqslant p}(-1)^n a_n$ converge.

$\sum_{n\geqslant p}(-1)^n a_n$ est le reste à l'ordre $p-1$ (ou la série complète pour $p=0$) de la série précédente.
Elle converge donc.
On notera T_p sa somme.

3.3. Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
En tant que reste d'une série convergente, cette suite converge vers 0.

3.4. Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.
Le signe de T_p est celui de son premier terme : T_p est du signe de $(-1)^p$ (positif si p est pair, négatif sinon).

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.
On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
f étant continue sur $\mathbb{R}$ possède des primitives. En notant F celle qui s'annule en 0, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (puisque sa dérivée f y est continue). La fonction $G : x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la fonction composée $x \mapsto F\left(\sqrt{x}\right)$. La fonction racine carrée étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation :

$$\forall x > 0,\ G'(x) = \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

* * * * * *

5. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que si φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{i}\,\varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$.

5.1. Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé.

- Pour tout t dans $[0,1]$, la fonction $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$ donc intégrable ;
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$;
- De plus :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1],\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 1$$

  et la fonction constante $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$.

F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,t^2}\,\mathrm{d}t$$

5.2. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$F'(x) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Pour $x > 0$, en effectuant le changement de variable affine $t \mapsto u = t\sqrt{x}$, on obtient :

$$F'(x) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u$$

6. Convergence d'intégrales

6.1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergent.

La fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,\pi]$ et, pour u dans $]0,\pi]$:

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Or $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,\pi]$ donc, $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}$ l'est également ainsi que ses parties réelle et imaginaire.

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergent.

6.2. En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

Les fonctions $u \mapsto e^{iu}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ sont de classe C^1 sur $[\pi, +\infty[$. Par intégration par parties et sous réserve de convergence :

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = \left[-i\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right]_{\pi}^{+\infty} - \frac{i}{2}\int_{\pi}^{+\infty} e^{iu}\, u^{-3/2} du$$

Le crochet possède bien des limites finies. Les deux intégrales sont donc de même nature. Or :

$$\left|e^{iu}\, u^{-3/2}\right| = u^{-3/2}$$

et la fonction $u \mapsto u^{-3/2}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

6.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

D'après les deux questions précédentes (et par somme), l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

6.4. Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{iv^2}\, dv$ converge.

En effectuant le changement de variable $u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto v = \sqrt{u} \in \mathbb{R}_+^*$ qui est C^1, strictement croissant et bijectif, on obtient la convergence de l'intégrale et l'égalité :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{iv^2}\, dv = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

7. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$.

7.1. Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

Pour $n \geqslant 1$, w_n existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment et w_0 est une intégrale de la question **6.1**.

7.2. On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n w_n$.

Prouver que α_n est un réel strictement positif.

On pourra effectuer sur w_n le changement de variable affine $t = u - n\pi$.

Pour u dans $[n\pi, (n+1)\pi]$, $\sin(u)$ est du signe de $(-1)^n$ d'après la question **2** (la fonction sin étant positive sur $[0, \pi]$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, α_n est positif ou nul.
Par intégration d'une fonction continue (ou prolongeable par continuité en 0 pour $n = 0$) ayant un signe constant et n'étant pas identiquement nulle, w_n est non nul.
Pour tout n, α_n est strictement positif.

7.3. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement de variable $t = u - n\pi$, on a (c.f. la question **2**) :

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t$$

et :

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \int_0^{\pi} \sin(t)\left(\frac{1}{\sqrt{t+n\pi}} - \frac{1}{\sqrt{t+(n+1)\pi}}\right)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7.4. Prouver que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.

On pourra utiliser les questions de cours.

Pour $n \in N^*$:

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et, d'après la question **3.1**, la série alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge et (c.f. **3.2**) sa somme est positive.

7.5. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$

La série étant convergente, la suite de ses sommes partielles converge et la somme partielle de rang $n \in \mathbb{N}$ est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

La convergence de l'intégrale permet de conclure : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$

8. Montrer que pour tout x réel positif :

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$$

Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ G(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$$

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **4** et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(x) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u = F'(x)$$

Or :

$$F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} = G(0)$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$$

9. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

On pourra utiliser la question **6**.

Par convergence de l'intégrale et la valeur de la limite, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2 = 0$$

En séparant parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} - 2\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\mathrm{d}u \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\mathrm{d}u = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(u^2)\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\mathrm{d}u = 0$$

D'où (les intégrales étant positives) :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$