Exercice 1.

1. Pour tout entier n positif :
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{(n+3-n)}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$$

2. On doit forcément avoir $\alpha \geqslant 0$, sinon on aurait des probabilités négatives.

Puis, il suffit de trouver les valeurs de α pour lesquelles $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\alpha}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 1$.

Or, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{3\alpha}{n(n+1)(n+2)(n+3)} &= \alpha \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \alpha\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right) \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\alpha}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6}\alpha$.
La seule valeur de α qui convient est 6.

3. Soit $\alpha = 6$.

3.1. Sous réserve de convergence, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, P([X = n])$.

On a alors pour tout entier naturel n non nul : $n\, P([X = n]) = \dfrac{18n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.
La série de terme général $\dfrac{18n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ est absolument convergente car ses termes sont positifs et $\dfrac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{18}{n^3}$, ce dernier terme général étant celui d'une série de Riemann convergente.
Il en résulte que X admet une espérance.
De plus :
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= 9 \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= 9 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ &= 9\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+2)(N+3)}\right)\end{aligned}$$

par télescopage.

On en déduit que : $\boxed{E(X) = \dfrac{3}{2}}$

3.2. On utilise le théorème de transfert.

Sous réserve de convergence, il vient : $\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum_{n\geq 1} \frac{18n(n+1)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

La série de terme général $\frac{18n(n+1)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ est absolument convergente car ses termes sont positifs et $\frac{18}{(n+2)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{18}{n^2}$.

Ainsi $X(X+1)$ admet une espérance.

De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{18}{(n+2)(n+3)} &= 18 \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+3)-(n+2)}{(n+2)(n+3)} \\
&= 18 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \\
&= 18\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{N+3}\right) \text{ par télescopage.}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\mathbb{E}(X(X+1)) = 6}$

3.3. D'après les deux question précédentes, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Or $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$, donc $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{9}{4}}$

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, n est un entier non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{r} q = r+1$, sinon $\sum_{k=0}^{r} q = \frac{q^{r+1}-1}{q-1}$.
2. Soit p un entier non nul.
   Pour $p > 1$, on reconnaît la formule de Bernoulli : $X^p - 1 = (X-1)\left(1 + X + ... + X^{p-1}\right)$
   Le reste de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X-1$ est donc nul et son quotient est $1+X+...+X^{p-1}$.
   Pour $p = 1$, le reste est toujours nul et le quotient est 1.
3. Soit $P \in E_n$.
   En notant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(1 + x + ... + x^k\right)$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(1+x+...+x^k\right)$ convient.

C'est le seul car si un polynôme L convient, il coïncide avec Q pour tout réel différent de 1 et par suite, $L-Q$ admet une infinité de racines c'est donc le polynôme nul et l'on peut affirmer : $L=Q$. Q est donc l'unique solution du problème posé.

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. D'après ce qui précède, pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de E_n, $f(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(1+x+...+x^k\right)$, ce qui démontre que $f(P) \in E_n$.

De plus, en notant $P_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $P_2 = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes de E_n et λ un réel, il vient immédiatement :

$$f(\lambda P_1 + P_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k + b_k}{k+1}\left(1+x+...+x^k\right) = \lambda f(P_1) + f(P_2).$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E_n}$

5. Soit $P \in E_n$ tel que $f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

En notant encore $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$f(P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(1+x+...+x^k\right) = 0$$

La famille de polynôme $\left(1+X+...+X^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre car formée de polynômes non nuls échelonnés en degré, ainsi : $\forall k \in [\![0,n]\!], a_k = 0$, et par suite $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On peut raisonner autrement : $f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \iff \forall\, x \neq 1, \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Alors, par dérivation, on obtient : $\forall\, x \neq 1$, $P(x) = 0$.

Comme précédemment, $P - 0_{\mathbb{R}[X]}$ est un polynôme qui possède une infinité de racines : c'est le polynôme nul et $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On en déduit que l'endormorphisme f est injectif, et puisque E_n est de dimension finie, f est un **automorphisme** de E_n.

Enfin, pour tout polynôme P de E_n, on a $(f(P)(X-1))' = P$ ce qui permet d'écrire :

$$f^{-1} : \begin{cases} E_n & \to E_n \\ Q & \mapsto Q + (X-1)Q' \end{cases}$$

6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.

Pour tout entier k de $[\![0,n]\!]$, $f\left(X^k\right)=\dfrac{1}{p+1}\left(1+X+...+X^k\right)$ et $f^{-1}(X^k)=(k+1)X^k-kX^{k-1}$ on en déduit :

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1}\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1\end{pmatrix}$$

7. A et A^{-1} étant triangulaires supérieures, on a immédiatement :

$$\mathbf{Sp}(A)=\left\{\frac{1}{k},\ k\in[\![1,n+1]\!]\right\}\text{ et }\mathbf{Sp}\left(A^{-1}\right)=[\![1,n+1]\!]$$

8. Les matrices A et A^{-1} sont des matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et ont $n+1$ valeurs propres distinctes elles sont donc diagonalisables.

9. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k\in\mathbb{N}^*$ d'un polynôme Q de E_n.
Alors il existe un polynôme R tel que : $Q=(X-\alpha)^k\times R$ et R n'admet pas α pour racine. ($R(\alpha)\neq 0$)
Il vient alors :

$$\begin{aligned}f^{-1}(Q)&=(X-\alpha)^kR+(X-1)(X-\alpha)^kR'+k(X-\alpha)^{k-1}R\\ &=(X-\alpha)^{k-1}\times\left[(X-\alpha)R+(X-1)(X-\alpha)R'+k(X-1)R\right]\end{aligned}$$

On en déduit que α est une racine d'ordre au moins $k-1$ de $f^{-1}(Q)$.
Soit $S=(X-\alpha)R+(X-1)(X-\alpha)R'+kR$, on a : $S(\alpha)=k(\alpha-1)R(\alpha)$.
On peut alors conclure suivant les différents cas :

- Si $\alpha=1$:
  α est racine d'ordre exactement k de $f^{-1}(Q)$ car $f^{-1}(Q)=(X-1)^k\,T$ avec $T(1)=(k+1)\,R(1)\neq 0$.
- Si $\alpha\neq 1$:
  - Si $k>1$: α est racine d'ordre exactement $k-1$ de $f^{-1}(Q)$ car $f^{-1}(Q)=(X-\alpha)^{k-1}\,T$ avec $T(\alpha)=k(X-1)R(\alpha)\neq 0$.
  - Si $k=1$, α n'est pas racine de $f^{-1}(Q)$ car $f^{-1}(Q)(\alpha)=k\,R(\alpha)\neq 0$.

10. La matrice A^{-1} est triangulaire supérieure et donc : $\mathbf{Sp}\left(f^{-1}\right)=\mathbf{Sp}\left(A^{-1}\right)=[\![1,n+1]\!]$.
Il y a $n+1$ valeurs propres dans un espace de dimension $n+1$: on retrouve que l'endomorphisme f^{-1} est diagonalisable et de plus, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.
Plus précisément, on a :

$$E_k\left(f^{-1}\right)=\mathrm{Vect}\left((X-1)^{k-1}\right),\ k\in[\![1,n+1]\!]$$

11. k étant non nul, on a :

$$\begin{aligned}f^{-1}(Q)=kQ&\Leftrightarrow Q=f(kQ)\text{ car } f \text{ est un automorphisme}\\ &\Leftrightarrow f(Q)=\frac{1}{k}Q\end{aligned}$$

Ainsi $Q \in E_k\left(f^{-1}\right) \Leftrightarrow Q \in E_{\frac{1}{k}}(f)$
Donc les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Noter que tout devient très simple si, dès le début, on se place dans la base $\mathscr{E} = (1, X-1, (X-1)^2, ..., (X-1)^n)$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et $T-$périodique.
On peut par exemple, poser pour tout x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^T f(u)$.
La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (f est continue sur $\mathbb{R}$) et par dérivation on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \varphi'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

On en déduit que φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
Or $\varphi(0) = 0$ donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0 \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$.

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$x\,y''(x) + y'(x) - 4\,x\,y(x) = 0 \quad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$ et telle que $g(0) = a_0 = 1$.

2.1. Sous réserve que g existe sur un intervalle $]-R, R[$, où R est un réel strictement positif, on a, par dérivation terme à terme d'une fonction développable en série entière : $\forall x \in]-R, R[$:

$$g'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} x^n$$
$$g''(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}$$

g étant solution de $(**)$ on a alors pour tout réel x dans $]-R, R[$: :

$$xg''(x) + g'(x) - 4xg(x) = 0 \Leftrightarrow a_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left((n+1)^2 a_{n+1} - 4a_n\right) x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière on a donc :

$$\begin{cases} \qquad\qquad a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \dfrac{4}{(n+1)^2} a_{n-1} \end{cases}$$

2.2. En distinguant les cas pairs et impairs et par une récurrence immédiate, on déduit de la question précédente : $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{1}{(p!)^2}$.

2.3. En utilisant la règle de d'Alembert pour les séries numériques, pour $x \neq 0$, comme

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}x^{2(n+1)}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

la solution trouvée $g(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \ \mapsto\ F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(2x\cos(t)\right) \mathrm{d}t.$$

3. Quelques propriétés de la fonction F.

3.1. Pour tout réel x, en utilisant le changement de variable $u = \pi - t$:

$$\begin{aligned} F(-x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(-2x\cos(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(2x\cos(u)\right) \mathrm{d}u \\ &= F(x) \text{ d'après la question de cours comme } u \mapsto \exp\left(2x\cos(u)\right) \text{ est } 2\pi\text{-périodique.} \end{aligned}$$

Ainsi, F est paire.

3.2. Pour tout couple (x,t) de $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, on pose $h(x,t) = \exp\left(2x\cos(t)\right)$.
Soit I un segment de $\mathbb{R}$.

3.2.1. h est C^1 sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ par opérations sur des fonctions C^1.

3.2.2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $\forall (x,t) \in I\times[0,2\pi]$, $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (2\cos(t))^k h(x,t)$.

Et par les théorèmes généraux et la question **3.2.1.**, la fonction $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$.

3.2.3. On en déduit :

$$\forall (x,t) \in I\times[0,2\pi],\ 0 \leqslant \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant 2^k\,|h(x,t)| \leqslant 2^k\,M.$$

car h est continue sur le compact $I\times[0,2\pi]$ et donc, bornée sur ce compact par un réel positif M.
On peut alors choisir $M_k = 2^k M$.

3.2.4. Par domination par une constante pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que F est de classe C^k sur I pour tout entier naturel k.
Il en résulte que F est de classe C^∞ sur I et donc sur $\mathbb{R}$.

3.2.5. Et de plus, pour tout entier naturel k et pour tout réel x :

$$F^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\cos(t))^k \exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

3.3. Soit x un réel :

$$\begin{aligned} 2\pi\left(xF''(x) + F'(x) - 4xF(x)\right) &= \int_0^{2\pi} \left(4x\cos^2(t) + 2\cos(t) - 4x\right)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -4x\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{2\pi} \cos(t)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\text{Par intégration par parties à justifier : } \int_0^{2\pi} \cos(t)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t = x\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Et finalement : } xF''(x) + F'(x) - 4xF(x) = 0$$

ce qui prouve que F est solution de $(**)$.

4. Développement en série entière de F.

4.1. D'après le cours, $\forall t \in \mathbb{R} : \exp(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}$.

4.2. On remarque tout d'abord que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{|2x\cos(t)|^k}{k!}\mathrm{d}t\right)$ converge pour tout réel x par comparaison, puisque son terme général est majoré par le terme général d'une série convergente :

$$\int_0^{2\pi} \frac{|2x\cos(t)|^k}{k!}\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\frac{|2x|^k}{k!}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\quad F(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(2x\cos(t))^k}{k!}\mathrm{d}t\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(2x)^k}{2\pi k!}\left(\int_0^{2\pi} (\cos(t))^k \mathrm{d}t\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^{k-1}}{\pi k!} J_k x^k \end{aligned}$$

où $J_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos(t))^k \mathrm{d}t$

4.3. Facilement, $J_0 = 2\pi$ et $J_1 = 0$.

4.4. Soit n un entier supérieur à 2.
On intègre par parties en utilisant les fonctions u et v de classe C^1 :

$u(t) = \cos^{n-1} t$ et $v(t) = \sin t$.

$$J_n = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-1} \cos(t)\mathrm{d}t$$
$$= \left[\sin(t)\cos^{n-1}(t)\right]_0^{2\pi} + (n-1)\int_0^{2\pi} \cos^{n-2}(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$$

avec $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ on a la relation :

$$J_n = (n-1)(J_{n-2} - J_n)$$

On en déduit : $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$.

4.5. Pour tout entier n on obtient par une récurrence rapide : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $J_{2n+1} = 0$ et $J_{2n} = 2\pi\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$

4.6. On résume ce que l'on a trouvé : F est
- solution de $(**)$,
- développable en série entière,
- vaut 1 en 0,
- les coefficients des développements en série entière de F et g sont égaux.

Ainsi : $F = g$.

Exercice 4.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Dans tout l'exercice, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.
O_n et I_n sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de cet espace.
On note enfin $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Question de cours

1. Facilement :
$M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T M = I_n \Leftrightarrow M^T = M^{-1} \Leftrightarrow MM^T = I_n \Leftrightarrow M^T \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la transposition.
Soient $(A, B) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2$, on a $(AB)^T(AB) = B^T(\underbrace{A^T A}_{=I_n})B = B^T B = I_n$, donc $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la multiplication matricielle.

Partie 1

2. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1. On a, en effectuant les produits par blocs :

$$UV = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -A & -AB + \lambda I_n \end{pmatrix} \text{ et } VU = \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & 0 \\ -\lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

2.2. On sait d'après le cours que : $\det(UV) = \det(VU)$.
Or : $\det(UV) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda)$ et $\det(VU) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$.
Il en résulte que les polynômes caractéristiques de AB et de BA coïncident sur $\mathbb{R}^*$, ils sont donc égaux.

3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\left(M^T M\right)^T = M^T M$. La matrice $M^T M$ est donc symétrique réelle et, d'après le théorème spectral, diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

4. D'après la question **2.** les polynômes caractéristiques de $M^T M$ et de MM^T sont égaux et donc, ces matrices ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.
De plus, elles sont diagonalisables car symétriques réelles.
Il existe donc deux matrices orthogonales P et Q et une matrice diagonale D telles que :

$$M^T M = PDP^T \text{ et } MM^T = QDQ^T$$

Alors :

$$M^T M = Q^T PMM^T P^T Q = R^T MM^T R \text{ où } R = P^T Q \in O_n(\mathbb{R})$$

Ce qui prouve le résultat, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $R \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M^T M = R^T MM^T R$$

Partie 2

On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice $Q \in O_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Q^T M Q = M^T$. Une telle matrice M sera dite *orthotransposable*.
On rappelle que si $\mathcal{S}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{A}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n.$$

5. Soit $S \in \mathcal{S}_n$ on a $S^T = S = I_n^T S I_n$ et comme $I_n \in O_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $S \in \mathcal{T}_n$.

6. Soient $A \in \mathcal{A}_n$ et $Q \in O_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\left(Q^{-1}AQ\right)^T &= Q^T A^T \left(Q^{-1}\right)^T \\ &= -Q^T A \left(Q^{-1}\right)^T \text{ car } A \in \mathcal{A}_n \\ &= -Q^{-1} A\, Q \text{ car } Q^{-1} = Q^T\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $Q^{-1}AQ \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

7. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en utilisant la somme directe indiquée en introduction de la question :

$$\exists\, (S, A_1) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n,\ M = S + A_1.$$

Comme $S \in \mathcal{S}_n$, S est diagonalisable dans une base orthonormale, et donc, $\exists\, T \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $S = TDT^{-1}$.
On a alors : $M = TDT^{-1} + A_1 = T(D + \underbrace{T^{-1}A_1T}_{\in \mathcal{A}_n})T^{-1} = T\,(D + A)\,T^{-1}$ en ayant posé $A = T^{-1} A_1\, T$ qui est encore un élément de $\mathcal{A}_n$ d'après la question précédente.
Toute matrice peut donc s'écrire $M = T(D + A)T^{-1}$, avec D diagonale, A antisymétrique et T orthogonale.

8. Cas $n = 2$.

8.1. Soit M une matrice diagonale de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors , il existe deux réels a et b tels que $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Cette matrice est orthogonale si, et seulement si, $a^2 = b^2 = 1$.
Les matrices diagonales et orthogonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sont donc les matrices de l'ensemble :

$$\left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8.2. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

La matrice $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale et diagonale et telle que :

$$\forall L \in \mathcal{L},\ L^T = W^T L W.$$

8.3. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
D'après la question **7.** : il existe $T \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{L}$ telles que $M = TLT^{-1}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} M^T &= \left(TLT^{-1}\right)^T \\ &= \left(T^{-1}\right)^T L^T T^T \\ &= \left(T^{-1}\right)^T W^T L W T^T \\ &= \left(T^{-1}\right)^T W^T T^{-1} M T W T^T \\ &= Q M Q^{-1}, \end{aligned}$$

en posant $Q = \left(T^{-1}\right)^T W^T T^{-1} = T W T^T \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$
Ce qui prouve donc que M est orthotransposable.

9. On suppose à présent que n **est impair**.
Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[A, B] = AB - BA$, matrice appelée *crochet de Lie* de A et B.

9.1. Soit $M \in \Delta_n$, alors : Il existe un unique couple $(A, S) \in \mathcal{A}_n \times \mathcal{S}_n$ tel que $M = A + S$.
De plus il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^T M Q = M^T$ puisque M est supposée orthotransposable.
Alors : $Q^T A Q = -A$ et $Q^T S Q = S$.
On a donc :

$$\begin{aligned} [M^T, M] &= M^T M - M M^T \\ &= (-A + S)(A + S) - (A + S)(-A + S) \\ &= 2(SA - AS) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
Q^T[M^T, M]Q &= 2Q^T(SA - AS)Q \\
&= 2\left(Q^T SQQ^T AQ - Q^T AQQ^T SQ\right) \\
&= 2(-SA + AS) \\
&= -[M^T, M]
\end{aligned}$$

et ainsi, $[M^T, M]$ est semblable à son opposé.

9.2. Comme $[M^T, M]$ est semblable à son opposé, alors :

$$\det\left([M^T, M]\right) = \det\left(-[M^T, M]\right) = (-1)^n \det\left([M^T, M]\right).$$

L'entier naturel n étant impair on en déduit : $\det\left([M^T, M]\right) = 0$.