## Correction de l'exercice 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, 2, ... , $n$, ...
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs 1, 2, ... , $n$.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au $n$-ième saut est : $p_n = \frac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $S_k$ l'évènement : « le sauteur a réussi son $k$-ième saut » et on note $X$ la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Formule des probabilités composées :
   Pour toute famille $(B_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ d'évènements tels que $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{n-1}) \neq 0$, alors :
   $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times ... \times \mathbb{P}_{B_1\cap B_2\cap ... \cap B_{n-1}}(B_n)$.
2. Pour tout réel $t$, on a : $\mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n\,!}$.
3. $X$ prend toutes les valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
4. $[X = 1] = S_1 \cap \overline{S_2}$, donc $\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}_{S_1}(\overline{S_2})$ par la formule des probabilités composées.
   D'où $\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{2}}$.
5. La variable aléatoire prend la valeur 2 si et seulement si le sauteur a réussi les sauts 1 et 2 mais a raté le saut 3. Donc $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$.
   Par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}([X = 2]) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}_{S_1}(S_2)\mathbb{P}_{S_1\cap S_2}(\overline{S_3}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$,
   donc $\boxed{\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{3}}$.
6. Soit $n \geqslant 2$.
   L'évènement $[X = n]$ signifie que le sauteur a réussi tous les sauts jusqu'au saut numéro $n$ puis raté le saut numéro $n+1$.
   On en déduit que $[X = n] = \left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} S_k\right) \cap \overline{S_{n+1}}$.
7. On utilise la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité de cet évènement :
   $P(X = n) = P(S_1)\, P_{S_1}(S_2)\, P_{S_1\cap S_2}(S_3) ... P_{S_1\cap ... \cap S_n}(\overline{S_{n+1}})$
   On en déduit que $P(X = n) = p_1\, p_2 ... p_n\,(1 - p_{n+1}) = \frac{1}{n\,!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.
   On remarque que cette formule est encore valable pour $n = 1$.
8. Vérifions qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité d'une v.a.r. :
   $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\,!} = 1 - \frac{1}{(n+1)\,!}$
   Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

**9.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $t_n = n\,P(X = n) = \dfrac{1}{(n-1)\,!}\,\dfrac{n}{n+1}$.

Alors : $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la règle de D'Alembert assure la convergence de la série de terme générique $n\,P(X = n)$ : $X$ possède une espérance.

Pour en calculer sa valeur, on part de sa somme partielle : $E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)\,!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)\,!}$ puis on utilise :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)\,!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)\,!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\,!}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n\,!} = \mathrm{e}$

Finalement, $\boxed{E(X) = e - 1}$.

**Correction de l'exercice 2**

*Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

**1. Étude de la convergence de la série de terme général $u_n$**

**1.1.** On a : $\forall\, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \in [0,1]$ et donc, $|u_n| = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Ensuite, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t) = \cos^n(t)(\cos(t)-1) \leqslant 0$ et par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t$.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$ : $\boxed{\text{la suite } (|u_n|) \text{ est décroissante}}$.

**1.2.** On va appliquer le théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \cos^n(t)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;
- pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos(t) < 1$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux $f$ définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = 0$ si $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f(0) = 1$;
- pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^n(t) \leqslant 1$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ est dominée sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par la fonction constante égale à 1 qui est intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\boxed{|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 0}$.

**1.3.** D'après les questions **1.1.** et **1.2.** la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc elle converge.

**2. Calcul de la somme de cette série**

**2.1.** C'est presque du cours : la formule de duplication donne pour tout réel $a$, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, donc $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$. On en déduit que pour tout $t$ réel, $\boxed{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos(t))}$.

**2.2.** On effectue le changement de variable affine : $u = \frac{t}{2}$ qui donne : $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$

et donc, $\boxed{I = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)} = [\tan(u)]_0^{\pi/4} = 1}$.

**2.3. Intégration terme à terme ?**

**2.3.1.** On reconnaît en $|u_n| = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ une intégrale de Wallis.

Ainsi, pour trouver une relation entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$, il suffit d'effectuer une intégration par parties en écrivant que $|u_{n+2}| = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose alors : $u = \cos^{n+1}(t)$ et $\mathrm{d}v = \cos(t)\,\mathrm{d}t$

D'où, $\mathrm{d}u = -(n+1)\,\cos^n(t)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t$ et on peut choisir $v = \sin(t)$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui justifie l'intégration par parties.

$$\begin{aligned}\text{Alors : } |u_{n+2}| &= [\cos^n(t)\,\sin(t)]_0^{\pi/2} + (n+2)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\left(1 - \cos^2(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\,(|u_n| - |u_{n+2}|)\end{aligned}$$

Et finalement, $\boxed{|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2}\,|u_n|}$.

**2.3.2.** On a $|u_0| = \frac{\pi}{2} \geqslant 1$ et $|u_1| = 1 \geqslant \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$.

Alors, la relation obtenue à la question précédente permet d'affirmer que $|u_{n+2}| \geqslant \frac{1}{n+2}$.

Il en résulte par récurrence double que l'on a : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}}$.

**2.3.3.** Il y a deux théorèmes d'intégration terme à terme dans le programme :

- le premier concerne une suite de fonctions $(f_n)$ continues sur un segment et dont la série converge uniformément sur le segment. Pour nous, $f_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ce sont bien des fonctions continues, mais la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas en 0.
- le second concerne une suite de fonctions $(f_n)$ continues par morceaux sur un intervalle et dont la série converge simplement. On a de nouveau $f_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ce sont des fonctions continues et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Toutefois, il faut aussi l'hypothèse $\sum \displaystyle\int_0^{\pi/2} |f_n|$ converge. Or ce n'est pas le cas car $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |f_n| = |u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$.

On ne peut donc appliquer aucun des deux théorèmes d'intégration terme à terme du programme.

**2.4.** On pose, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.

On a :

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ V_n(t) = \dfrac{1 - (-1)^{n+1} \cos^{n+1}(t)}{1 + \cos(t)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(t) = \dfrac{1}{1 + \cos(t)}$ et donc, la suite de fonctions $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $f$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ |V_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{1 + \cos(t)} = g(t)$ qui est une fonction intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Il est aussi possible de majorer par 2.

Le Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions s'applique et on peut intervertir passage à la limite et intégration.
Il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cos^n(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)}\, \mathrm{d}t$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1}$.

## Correction de l'exercice 3

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes $f$ et $g$ de $E_n$ définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall\, j \in [\![2, n]\!], f(e_j) = e_1 + e_j\right) \quad \text{et} \quad (g = f - \mathrm{id}_{E_n}).$$

**1.** La matrice $F$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est : $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $G$ de $g$ dans la base $\mathscr{B}$ est : $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**2.** Comme $F$ et $G$ sont symétriques réelles, les endomorphismes $f$ et $g$ de $E_n$ sont diagonalisables.

**3. Diagonalisation de $f$ et de $g$ dans une même base**

**3.1.** On a $g(e_1) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} e_i$ et $\forall j \in [\![2, n]\!], g(e_j) = e_1$.

Donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\Big((g(e_j))_{1 \leqslant j \leqslant n}\Big) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1)$ où $\boxed{\mathscr{B}_1 = \Big(e_1, \displaystyle\sum_{i=2}^{n} e_i\Big)}$ est libre.

Donc $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$ et par suite $\mathrm{rg}(g) = \dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$.

Comme $\forall j \in [\![3, n]\!], g(e_j - e_2) = 0$, $\boxed{\mathscr{B}_2 = (e_j - e_2)_{3 \leqslant j \leqslant n}}$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Ker}(g)$. Comme elle est libre, de cardinal $n-2$ et comme, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(E_n) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - 2$, on peut dire que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

**3.2.** On remarque que : $\forall j \in [\![3, n]\!], (e_j - e_2 | e_1) = 0$ et $\Big(e_j - e_2 \Big| \displaystyle\sum_{i=2}^{n} e_i\Big) = 0$.

Chaque vecteur de la base de $\mathrm{Ker}(g)$ est donc orthogonal à tout vecteur de la base de $\mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont orthogonaux donc en somme directe. On déduit en utilisant le théorème du rang que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $E_n$.

**3.3.** Comme $g$ est diagonalisable et $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = n - 2$, on sait que $0$ est valeur propre de $g$ de multiplicité $n - 2$.

Donc $\mathrm{Tr}(g) = 0 \times (n-2) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ avec $\lambda_1$ et $\lambda_2$ non nulles. Ainsi, $\boxed{\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}}$ avec $\lambda_1$ et $\lambda_2$ non nuls et vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

**3.4.** On se propose de déterminer $\lambda_1$ et $\lambda_2$ par deux méthodes :

**3.4.1. Méthode 1**

**(i)** $\mathrm{Im}(g) = g(E_n) \subset E_n$ donc $g(\mathrm{Im}(g)) \subset g(E_n) = \mathrm{Im}(g)$, i.e. $\mathrm{Im}(g)$ est stable par $g$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $g(x) = 0_{E_n} \in \mathrm{Ker}(g)$ car $g(0_{E_n}) = 0_{E_n}$. Donc $\mathrm{Ker}(g)$ est stable par $g$.

**(ii)** Comme $\mathrm{Im}(g)$ est stable par $g$, on peut parler de $g_{|\mathrm{Im}(g)}$ :$\mathrm{Im}(g) \to \mathrm{Im}(g), x \mapsto g(x)$.

Sa matrice dans la base $\mathscr{B}_1$ est notée $H$. Notons $e'_1 = e_1$ et $e'_2 = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} e_j$.

Comme $g(e'_1) = g(e_1) = e'_2$ et $g(e'_2) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} g(e_j) = (n-1)e_1$, il s'ensuit que : $H = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**(iii)** $\chi_H(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(H)X + \det(H) = X^2 - (n-1)$, donc les valeurs propres de $h$ sont $\pm\sqrt{n-1}$. Le sous-espace propre associé à $\sqrt{n-1}$ est $\mathrm{Vect}(\sqrt{n-1}e'_1 + e'_2)$ et celui associé à $-\sqrt{n-1}$ est $\mathrm{Vect}(-\sqrt{n-1}e'_1 + e'_2)$.

**(iv)** En concaténant les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, on déduit de **3.4.** une base $\mathscr{B}'$ de $E_n$ dans laquelle la matrice de $g$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\chi_g(X) = X^{n-2}(X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X^{n-2}\chi_H(X)$.

D'où $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

### 3.4.2. Méthode 2

**(i)** $\forall x \in E_n$, $g(x) = \lambda x \Rightarrow g^2(x) = \lambda^2 x$. Les valeurs propres de $g$ étant $0$, $\lambda_1$ et $\lambda_2$, celles de $g^2$ sont $0$, $\lambda_1^2$ et $\lambda_2^2$. Donc $\boxed{\mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}}$.

**(ii)** $g^2(e_1) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} g(e_j) = (n-1)e_1$ et $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $g^2(e_j) = g(e_1) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} e_j$.

$$\text{D'où } G^2 = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(g^2) = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(iii)** $\boxed{\mathrm{Tr}(g^2) = 0 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2(n-1)}$.

**(iv)** Comme $\mathrm{Tr}(g) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, il s'ensuit que $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = (n-1)$. Comme $\lambda_1 > 0$, on retrouve $\boxed{\lambda_1 = \sqrt{n-1} \text{ et } \lambda_2 = -\lambda_1}$. On retrouve les résultats de **3.4.1.**.

**3.5.** $G$ étant diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = PDP^{-1}$ où la matrice $D$ est telle $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \ldots, 0)$ et $P$ une matrice dont les vecteurs colonnes sont des vecteurs propres de $G$.

Soit $X^\top = (x_1 \cdots x_n)$. Alors $GX = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ \forall j \in [\![2,n]\!], x_1 = \lambda x_j \end{cases}$ (1).

- Si $\lambda \neq 0$ et $x_1 \neq 0$, (1) $\iff \begin{cases} \forall j \in [\![2, n]\!], x_j = \dfrac{x_1}{\lambda} \\ \lambda^2 = (n-1) \end{cases}$ puisqu'un vecteur propre ne peut être nul.

  Pour $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ on peut prendre $x_1 = \sqrt{n-1}$ et $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $x_j = 1$.

  Pour $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$ on peut prendre $x_1 = -\sqrt{n-1}$ et $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $x_j = 1$.
- Si $\lambda = 0$, on a déjà vu que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(G) = \mathrm{Vect}\big((e_j - e_2)_{3 \leqslant j \leqslant n}\big)$.

D'où une matrice $P = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} & -\sqrt{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**3.6.** $F = G + I_n = PDP^{-1} + PP^{-1} = P(D + I_n)P^{-1}$.

Donc $P^{-1}FP = D + I_n = \mathrm{diag}(1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, 1, \ldots, 1)$ est une matrice diagonale.

**4.** Pour résoudre le système différentiel $X' = FX + tPe_1$, utilisons la méthode du cours en posant $X = PY$. On est ramené à la résolution de $Y' = (P^{-1}FP)Y + te_1$ (2).

(2) $\iff \begin{cases} y_1' = (1 + \sqrt{n-1})y_1 + t \\ y_2' = (1 - \sqrt{n-1})y_2 \\ \forall j \in [\![3, n]\!], y_j' = y_j \end{cases}$

Il s'ensuit que :

$\forall j \in [\![3, n]\!]$, $\exists \alpha_j \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_j = \alpha_j e^t$.

$\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_2 = \alpha_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t}$.

Pour déterminer $y_1$, on doit résoudre $y' = ay + t$ (3).

(3) $\iff \dfrac{d}{dt}(ye^{-at}) = te^{-at}$.

Il suffit de chercher une primitive de $t \mapsto te^{-at}$ sous la forme $t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-at}$.

On peut résoudre l'équation homogène puis chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto \alpha t + \beta$.

Donc $\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_1 = \alpha_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} - \dfrac{t}{1 + \sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{(1 + \sqrt{n-1})^2}$

On termine la résolution en écrivant $X = PY$.

## EXERCICE 4

On pose pour tout réel $x$, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

**1. Continuité de $f$**

**1.1.** La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues. Comme $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, la fonction $g : t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

**1.2.** La fonction $g$ est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, pour tout $t \geq 1$, $|g(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, par comparaison, la fonction $g$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

**1.3.** La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0, 1]$ car elle est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0. Elle est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ .

**1.4.** Posons, pour $x \geqslant 0$ et $t \in ]0, +\infty[$, $h(x, t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-xt}$.

- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ .
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t > 0$ et tout $x \geqslant 0$, on a :
  $0 \leqslant e^{-xt} \leqslant 1$, donc $|h(x, t)| \leqslant g(t)$, la fonction $g$ étant intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+}$.

## 2. Régularité de $f$

**2.1.** Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

**2.1.1.** La dérivée de $t \mapsto \sin(t)$ est $t \mapsto \cos(t)$ qui est bornée sur $\mathbb{R}$ en valeur absolue par 1. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction sin est donc 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $|\sin(t) - \sin(0)| \leqslant |t - 0|$, ce qui donne bien : $\boxed{\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t}$.

**2.1.2.** Soit $t > 0$. D'après la question précédente, $\sin^2(t) \leqslant t^2$. De plus, $a \leqslant x$ donc $-xt \leqslant -at$ et $0 \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$ par croissance de l'exponentielle.

Ainsi, $\sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant t^2\,\mathrm{e}^{-at}$, puis $\boxed{\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant t\,\mathrm{e}^{-at}}$.

**2.1.3.** Soit $t > 0$. De même que précédemment, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$. De plus, $0 \leqslant \sin^2(t) \leqslant 1$. Donc :

$\boxed{\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}}$.

**2.2.** Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs avec $0 < a < b$.

- Pour tout $x \in [a, b]$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $t \in ]0, +\infty[$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $C^2$ sur $[a, b]$.

- Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\sin^2(t)}{t}\, e^{-xt}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \sin^2 t\, e^{-xt}$ sont continues sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in ]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,\mathrm{e}^{-at}$, or $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-at}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $t\mathrm{e}^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées.
- Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in ]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$, or $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $a > 0$.

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$\boxed{f \text{ est } C^2 \text{ sur } [a,b] \text{ et } \forall\, x \in [a,b],\ f''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt}$$

Comme le résultat est valable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, il est aussi valable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**3. Une autre expression de $f''$**

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

**3.1.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. Alors $\left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}\right| = \left|\mathrm{e}^{i\theta t}\,\mathrm{e}^{-xt}\right| = \left|\mathrm{e}^{i\theta t}\right|\left|\mathrm{e}^{-xt}\right| = \left|\mathrm{e}^{-xt}\right|$. Ainsi, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\forall\, x > 0$, $\left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)\,t}\right| = \mathrm{e}^{-x\,t}$.

**3.2.** Pour tout réel $t$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. Comme $x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-xt} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)\,t}\right| = 0$ d'après la question précédente.

**3.3.** Soit $x > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2\,\mathrm{i}}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} - \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} + \dfrac{1}{2}$.

Prenons $A > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^A \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{4}\int_0^A \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_0^A \mathrm{e}^{(-2\mathrm{i}-x)t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^A \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}-x}(\mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)A} - 1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-2\mathrm{i}-x}(\mathrm{e}^{(-2\mathrm{i}-x)A} - 1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-x}(\mathrm{e}^{-Ax} - 1)\end{aligned}$$

Lorsque $A$ tend vers $+\infty$, on a d'après les questions précédentes :

$$f''(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}-x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{-4-x^2} + \frac{1}{2x} = -\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2x}$$

**4. Une autre expression de $f$**

**4.1.** On a pour tout $t > 0$ et tout $x > 0$, $|h(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$ d'après la question **2.1.1.**, donc :

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

**4.2.** D'après **2.1.2.**, pour tout $x > 0$, $|f'(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. On prend $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-xt}$ de sorte que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. On peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}$$

Par encadrement on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

**4.3.** La fonction $G$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G'(t) &= \ln\left(t^2+4\right) + \frac{2t^2}{t^2+4} - 2 + \frac{2}{1+(t/2)^2} \\ &= \ln\left(t^2+4\right) \end{aligned}$$

**4.4.** On primitive l'expression trouvée à la question **3.3.** : il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + C$$

Puis, $f'(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+4}\right) + C$. En prenant la limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$, on trouve $C = 0$ avec la question **4.4.2.**.
D'autre part, d'après la question **4.3.**, il existe $D \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x\ln(x) - x) - \frac{1}{4}G(x) + D = \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + D$$

Enfin, en utilisant la question **4.4.1.**, on trouve $D = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où, $\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}$.

**5.** La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t = f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ par croissances comparées.