Concours Centrale-Supélec 2001 PSI - Sujet 2 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : algèbre linéaire, orthonormalisation de Gram-Schmidt, forme quadratique, décomposition matricielle, LU, QR, Cholesky, analyse numérique, déterminant, espace euclidien, réduction d'un endomorphisme symétrique

Commentaires : Ce problème applique des méthodes d'algèbre linéaire et d'espaces euclidiens pour obtenir des décompositions matricielles qui servent essentiellement en analyse numérique, pour calculer des vecteurs propres et résoudre des systèmes. Il est dans l'ensemble difficile, car d'une part il n'est pas toujours aisé de deviner ce qui relève de l'algèbre linéaire "pure" et ce qui relève de la théorie des espaces euclidiens. D'autre part, il est assez long, et comporte peu d'indications!

Première Partie

I.A.1) Nous prouvons par exemple que si A est triangulaire inférieure inversible, alors A^{-1} est elle-même triangulaire inférieure. Il suffit alors de prendre la transposée pour traiter le cas des matrices triangulaires supérieures. Nous choisissons donc $A = (A_{i,j})$ où $A_{i,j} = 0$ si $j > i$, et posons $A^{-1} = (B_{i,j})$. Le fait que A est inversible s'écrit $A_{i,i} \neq 0$ pour tout i. Prouvons d'abord que $B_{1,k} = 0$ si $k \geq 2$. En effet, le terme de la première ligne k-ième colonne de AA^{-1} est $A_{1,1}B_{1,k}$, mais est aussi nul. D'où $B_{1,k} = 0$.

On prouve ensuite par récurrence sur $i \leq n$ que si $B_{i,k} = 0$ dès que $k \geq i+1$, en regardant le terme à la i-ème ligne et k-ième colonne de AA^{-1}, qui est nul et vaut aussi $A_{i,i}B_{i,k}$.

I.A.2) Nous montrons que $(\mathcal{L}_n,\times)$ est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles :

- $I_n \in \mathcal{L}_n$.
- Si $A \in \mathcal{L}_n$, $B \in \mathcal{L}_n$, alors on vérifie aisément que $AB \in \mathcal{L}_n$.
- Si $A \in \mathcal{L}_n$, alors A est inversible, et A^{-1} est triangulaire inférieure. Les éléments diagonaux de AA^{-1} sont les produits des éléments diagonaux de A et A^{-1} (car les matrices sont triangulaires inférieures). Donc les termes diagonaux de A^{-1} valent 1, et $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$.

I.B.1) Si $A = L_1U_1 = L_2U_2$, alors L_1,U_1,L_2,U_2 sont inversibles, et $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. Mais la matrice à gauche de l'égalité est dans $\mathcal{L}_n$ et celle à droite dans $\mathcal{U}_n$. Comme $\mathcal{U}_n \cap \mathcal{L}_n = \{I_n\}$, il vient $L_2 = L_1$ et $U_2 = U_2$. D'où l'unicité.

I.B.2) Écrivons $A = \begin{pmatrix} A_k & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, et $U = \begin{pmatrix} U_k & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Comme L et U sont inversibles, le calcul des déterminants prouve que U_k et L_k sont inversibles. Un calcul par blocs montre que $A_k = L_kU_k$ est inversible. Ou encore $\det(A_k) \neq 0$.

I.B.3) Posons $H = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -WA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$. Alors un calcul par blocs montre qu'une telle matrice H convient. Déterminons H^{-1}, en écrivant $H = (H_{i,j})$ et $H^{-1} = (K_{i,j})$. Nous allons appliquer la méthode du pivot de Gauss pour déterminer les coefficients $K_{i,j}$. Si $X = (x_1,\dots,x_n)$, et

$Y = (y_1, \dots, y_n)$, avec $Y = HX$, H^{-1} est la matrice telle que $H^{-1}Y = X$, ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} K_{1,1}y_1 + \cdots + K_{1,n}y_n & = & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n,1}y_1 + \cdots + K_{n,1}y_n & = & x_n \end{array} \right.$$

Mais l'égalité $Y = HX$ se lit encore :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & = & x_{n-1} \\ y_n & = & H_{1,1}x_1 + \cdots + H_{n-1,n-1}x_{n-1} + x_n \end{array} \right.$$

Nous exprimons $(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de $(y_1, \dots, y_n)$ [en d'autres termes nous résolvons le système] :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & y_{n-1} \\ x_n & = & -H_{1,1}y_1 - \cdots - H_{n-1,n-1}y_{n-1} + y_n \end{array} \right.$$

Nous en déduisons que :

$$H' = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -H' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ WA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques :

- On aurait pu résoudre la question I.A.1) par la même méthode.
- Il est important d'un point de vue algorithmique et d'implémentation effective sur ordinateur que l'inverse de la matrice H, qui est celle dont nous aurons besoin pour construire L, se calcule très facilement!

I.B.4) Nous procédons par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident. Soit H la matrice construite précédemment. Alors :

$$HA = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ 0 & B_{n,n} \end{pmatrix}.$$

A_{n-1} vérifie l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ et donc $LA_{n-1} = U$ (nous préférons écrire la factorisation sous cette forme qui sera un peu plus commode pour la suite). Considérons les matrices d'ordre n :

$$L' = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U' = \begin{pmatrix} U & LV \\ 0 & B_{n,n} \end{pmatrix}.$$

$L'H \in \mathcal{L}_n$, $U' \in \mathcal{L}_n$ et $(L'H)A = U'$. Ceci prouve l'hypothèse de récurrence au rang n.

I.C.1) La matrice P définie par :

- $P_{i,i} = 1$ sauf si $i = p$ ou $i = q$, auquel cas $P_{p,p} = P_{q,q} = 0$,
- $P_{p,q} = P_{q,p} = 1$,
- $P_{i,j} = 0$ sinon,

convient. Si on multipliait à droite par cette matrice, on aurait échangé les colonnes!

I.C.2.

a) La première ligne de A est obtenue en multipliant la première ligne de U par $L_{1,1} = 1$. Donc $U_{1,i} = A_{1,i}$.

b) La première colonne de A est obtenue en multipliant la première colonne de L par $U_{1,1} = A_{1,1}$. Donc $L_{k,1} = \frac{A_{k,1}}{A_{1,1}}$.

c) En raisonnant par blocs, avec les notations désormais classiques dans ce problème : $A_k = L_k U_k$. En prenant les déterminants :

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{array}\right] = U_{1,1} \times \dots U_{k,k}.$$

Une récurrence élémentaire nous donne donc :

$$U_{k,k} = \frac{\left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{array}\right]}.$$

d) Soit $2 \leq j \leq i \leq n$. Nous considérons P la matrice qui permet, en multipliant à gauche, d'échanger les colonnes i et j. PL a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 & \dots & & & \\ \vdots & & & & & \\ L_{j-1,1} & \dots & L_{j-1,j-1} & 0 & \dots & \\ L_{i,j} & \dots & L_{i-1,j-1} & L_{i,j} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}.$$

Nous prenons les déterminants par blocs de PA et $PL \times U$. Nous en déduisons :

$$L_{i,j} \times U_{1,1} \times \dots \times U_{j,j} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & \dots & j-1 & i \\ 1 & \dots & j-1 & j \end{array}\right].$$

Comme nous avons déjà calculé les $U_{i,i}$, nous en déduisons le résultat demandé par l'énoncé.

e) Nous procédons de même, en multipliant à droite par la matrice P. Nous trouvons que :

$$U_{j,i} = \frac{\left[\begin{array}{cccc} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & j \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & i-1 \\ 1 & \dots & i-1 \end{array}\right]}.$$

I.D Nous écrivons l'algorithme en Maple (signalons au passage qu'une fonction de décomposition LU est intégrée à Maple, la fonction LUdecomp).

```
 > n=4:
 > A:=matrix(4,4,[1,1,3,1,1,2,1,3,0,1,-1,2,1,-1,2,1]):
 > U:=matrix(n,n,0): L:=matrix(n,n,0):  #On initialise les matrices L et U à 0
 > for j from 1 to n do U[1,j]:=A[1,j]/A[1,1]:
od:   # Calcul des coordonnes de la premire ligne de U
 > for i from 2 to n do for j from i to n do  # Le reste des coefficients de U
     B:=submatrix(A,1..i-1,1..i-1):
     v:=[seq(k,k=1..i-1)]:
     v:=[op(v),j];
     C:=submatrix(A,1..i,v):
     U[i,j]:=det(C)/det(B):
     od: od;
 > for i from 1 to n do L[i,1]:=A[i,1]; od:
 > for j from 2 to n do for i from j to n do
     B:=submatrix(A,1..j,1..j):
```

```
    v:=[seq(k,k=1..j-1)]:
    v:=[op(v),i];
    C:=submatrix(A,v,1..j):
    L[i,j]:=det(C)/det(B):
    od: od;
> evalm(L);
> evalm(U);
```

I.E.1)L'application de l'algorithme précédent sur l'exemple donne :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

I.E.2) Pour obtenir une matrice ayant deux décompositions LU, il faut impérativement en choisir une non inversible. Par exemple, la matrice suivante convient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une matrice n'admet pas de décomposition LU dès qu'elle est inversible, et qu'un de ses mineurs principaux $\det(A_k)$ est nul. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'admet pas de décomposition LU.

I.E.3.a) Si $r > p+q$, ou $r < 0$, le résultat est clair. Dans le cas contraire, on développe de deux façons différentes le polynôme $(X+1)^{p+q}$: d'une part,

$$(X+1)^{p+q} = \sum_{r=0}^{p+q} C_{p+q}^r X^r.$$

D'autre part :

$$(X+1)^{p+q} = (X+1)^p(X+1)^q = \left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{q} C_q^k X^k\right) = \sum_{r=0}^{p+q}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_p^k C_q^{r-k}\right) X^r.$$

On égalise les coefficients devant X^r.

I.E.3.b) On pose $U_{i,j} = C_{j-1}^{i-1}$, qui donne bien une matrice triangulaire supérieure, et $L_{i,j} = C_p^{i-1-(j-1)}$, qui est bien dans $\mathcal{L}_n$. Si $B = LU$, alors :

$$\begin{aligned} B_{i,j} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} L_{i,k}U_{k,j} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_p^{i-1-(k-1)} C_{j-1}^{k-1} \\ &= C_{p+j-1}^{i-1} \\ &= A_{i,j}. \end{aligned}$$

Comme tous les coefficients diagonaux de U sont égaux à 1, on en déduit que $\det A = 1$. Pour $p = 1$ et $n = 4$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième Partie

II.A.Soit $A \in \mathcal{S}_n$. A admet une base orthonormale de vecteurs propres $v_1, \dots, v_n$, associées aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

On suppose d'abord $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, et soit $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Comme A est symétrique définie positive, on sait que $\lambda_i > 0$. Alors,

$$^t vAv = \left(\sum_i \alpha_i {}^t v_i \right) \left(\sum_i \lambda_i \alpha_i v_i \right) = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2 > 0$$

(la dernière égalité est conséquence de l'orthogonalité des v_i).

Réciproquement, si $^t vAv > 0$ pour tout v, pour chaque i, $^t v_i A v_i = \lambda_i \|v_i\|^2 > 0$, et donc tous les valeurs propres de A endomorphisme symétrique sont strictement positives : $A \in \mathcal{S}_n^{++}$.

II.A.1) Toute matrice de $\mathcal{S}_n^{++}$ est inversible, et donc la décomposition LU, si elle existe, est unique. En vue de I.B. il suffit donc de prouver que pour tout k, $\det A_k > 0$. Soit q la forme quadratique associée à la matrice A. $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ se traduit sur q par le fait que q est définie positive. Nous notons q_k la restriction de q au sev engendré par $\{e_1, \dots, e_k\}$. q_k est elle aussi définie positive, et sa matrice dans la base $\{e_1, \dots, e_k\}$ est A_k. Nous en déduisons donc que $\det(A_k) > 0$.

II.A.2) Avec les notations habituelles, nous avons $A_k = L_k U_k$, et donc :

$$\det(A_k) = \det(L_k) \det(U_k) = U_{1,1} \dots U_{k,k} > 0.$$

Une récurrence immédiate sur i entraîne que $U_{i,i} > 0$.

II.B.1) Nous cherchons d'abord une décomposition $A = L'U'$, où L' est triangulaire inférieure, U' est triangulaire supérieure, et où L' et U' ont mêmes coefficients diagonaux. Nous procédons comme en I.C.2 :

- $L'_{1,1} = U'_{1,1} = \sqrt{U_{1,1}} = \sqrt{A_{1,1}}$.
- $U'_{1,i} = \frac{A_{1,i}}{\sqrt{A_{1,1}}}$.
- $L'_{i,1} = \frac{A_{i,1}}{\sqrt{A_{1,1}}}$.
- Nous avons :

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} = U'^2_{1,1} \dots U'^2_{k,k},$$

  et donc :

$$U'_{k,k} = \sqrt{\frac{\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}}}.$$

- De même qu'en I.C.2., nous avons, pour $2 \leq j \leq i \leq n$:

$$L_{i,j} \times U'^2_{1,1} \dots U'^2_{k-1,k-1} U'_{k,k} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & i \\ 1 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix},$$

et donc :

$$L_{i,j} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & i \\ 1 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 \\ 1 & \dots & j-1 \end{bmatrix} U'_{k,k}}.$$

– De même, pour $2 \leq i \leq j \leq n$:

$$U_{i,j} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & j \\ 1 & \dots & j-1 & i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \dots & i-1 \\ 1 & \dots & i-1 \end{bmatrix} U'_{k,k}}.$$

Nous avons déterminé une telle décomposition $A = L'U'$. Maintenant, la symétrie de A impose que $U'_{i,j} = L'_{j,i}$. On a donc $L = {}^tU$, ce qui prouve la factorisation, dite factorisation de Cholesky.

II.B.2) Si $A = {}^tB_1B_1 = {}^tB_2B_2$, alors $({}^tB_2)^{-1}\ {}^tB_1 = B_2B_1^{-1}$, et donc $B_2B_1^{-1}$ est une matrice diagonale. Maintenant, le calcul des déterminants prouve que :

$$B_{1,1}^2 \dots B_{k,k}^2 = C_{1,1}^2 \dots C_{k,k}^2$$

en notant $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ les coefficients respectifs de B_1 et B_2. Une simple récurrence, couplée à l'hypothèse préalable $B_{i,i} > 0$, $C_{i,i} > 0$, prouve que les coefficients diagonaux de B_1 et B_2 sont égaux. La matrice $B_2B_1^{-1}$ est donc la matrice identité, et $B_2 = B_1$.

II.C. Nous prouvons que $i) \implies iii) \implies ii) \implies i)$. Les implications $i) \implies iii)$ et $iii \implies ii)$ ont déjà été vues aux questions précédentes. Si on a $ii)$, il est très facile de vérifier de M est symétrique. Maintenant, si v est dans $\mathbb{R}^n$, non nul, alors : ${}^tvMv = {}^t(Bv)Bv = \|BV\|^2 > 0$ puisque B est inversible. La question II.A. permet de conclure.

Troisième Partie

III.A.1) $H^{(v)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$. En effet, si $y \in \mathbb{R}^n$:

$$H^{(v)}(y) = y - 2v\ {}^tvy = y - 2(v,y)v,$$

où (x,y) désigne le produit scalaire (canonique) de x et y.

- Si $y \in v^\perp$, $H^{(v)}(y) = y$.
- Si $y = \lambda v$, $H^{(v)}(y) = \lambda v - 2\lambda v = -\lambda v$.

III.A.2) Nous procédons par analyse-synthèse : si $a = \lambda v + y$, alors $H^{(v)}y = -\lambda v + y$, et on veut que cette quantité soit colinéaire à e_1. Comme $H^{(v)}$ est une symétrie orthogonale, elle conserve la norme, et donc $H^{(v)}(a) = \pm\|a\|e_1$. En combinant ces deux équations, on trouve que v est colinéaire à $a \pm \|a\|e_1$.

Nous posons alors $v = \frac{a+\|a\|e_1}{\|a+\|a\|e_1\|}$. On décompose a en $a = (v,a)v + y =$, où $y \in v^\perp$. Ceci donne :

$$\begin{aligned} y &= a - \frac{1}{\|a+\|a\|e_1\|^2}\left(\|a\|^2 + (e_1,a)\right)(a + \|a\|e_1) \\ &= a - \frac{1}{2\|a\|^2 + 2(e_1,a)}\left(\|a\|^2 + (e_1,a)\right)(a + \|a\|e_1) \\ &= \frac{a - \|a\|e_1}{2}, \end{aligned}$$

et aussi $(v,a)v = a - y = \frac{a+\|a\|e_1}{2}$. Nous avons donc

$$H^{(v)}(a) = \frac{a+\|a\|e_1}{2} - \frac{a-\|a\|e_1}{2} = \|a\|e_1.$$

Ceci prouve le résultat demandé par l'énoncé. Nous avons même prouvé un peu plus, à savoir que le coefficient * de $(*,0,\ldots,0)$ peut être choisi de manière à être positif. Nous utiliserons cette précision dans les questions suivantes.

III.B.1) Nous prouvons le résultat par récurrence sur n, en prouvant même un peu plus, puisque nous prouvons que nous pouvons choisir des matrices de Householder $H_1,\ldots,H_{n-1}$ de sorte que $H_{n-1}\ldots H_1 A \in \mathcal{U}_n^+$. Le résultat est vrai pour $n=1$. Si le résultat est vrai au rang $n-1$, nous prenons A dans $\mathcal{M}_n$. D'après II.A.2), il existe une matrice de Householder H_1 telle que :

$$H_1 A = \begin{pmatrix} d_1 & V \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $d_1 > 0$. Maintenant, par hypothèse de récurrence, $H'_{n-1}\ldots H'_2 B = R$, où $R \in \mathcal{U}_{n-1}^+$. En outre, si $H' = I_{n-1} - 2v'\,{}^t v'$ est une matrice de Householder de taille $n-1$, alors la matrice $H = I_n - 2v{}^t v$, où $v = (0,v')$, est une matrice de Householder de taille n, et :

$$\begin{pmatrix} * & V \\ 0 & H'B \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} * & V \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

En notant H_i la matrice de Householder déduite de H'_i par le procédé précédent, nous en déduisons que $H_{n-1}\ldots H_1 A \in \mathcal{U}_n^+$.

III.B.2) Nous avons déjà presque tout fait. Pour conclure, il suffit de remarquer qu'une symétrie orthogonale est .... orthogonale, et que le groupe orthogonal est ..... un groupe!

III.B.3) Nous procédons comme pour la factorisation LU : s'il existe deux factorisations $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$, nous aurons $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}$. Il suffit alors de remarquer que la seule matrice orthogonale qui est triangulaire supérieure à coefficients positifs est I_n. Ceci se démontre en remarquant par exemple que si D est orthogonale et triangulaire supérieure, son inverse est ${}^t D$, et est donc triangulaire inférieure. Mais elle est aussi triangulaire supérieure, et finalement D est diagonale. Comme les valeurs propres de D sont de module 1, et qu'en outre les coefficients diagonaux de D sont positifs, c'est que $D = I_n$.

III.C. Il s'agit du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt! On note $A_1,\ldots,A_n$ les vecteurs colonnes de A. La matrice A peut être interprétée comme la matrice de passage, dans E, de la base canonique (e) à la base canonique (a) formée des vecteurs A_j (c'est bien une base car A est supposée inversible). On note $(q) = (Q_1,\ldots,Q_n)$ la base orthonormée de E obtenue en appliquant à la base (a) le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On rappelle que $Q_1,\ldots,Q_n$ est l'unique famille orthonormale vérifiant, pour tout k de 1 à n : $vect(Q_1,\ldots,Q_k) = vect(A_1,\ldots,A_k)$, et $(Q_k,A_k) > 0$. Soit Q la matrice de passage de la base canonique à la base canonique $Q_1,\ldots,Q_n$. La matrice Q est orthogonale car c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées. Soit R la matrice de passage de la base $Q_1,\ldots,Q_n$ à la base $A_1,\ldots,A_n$. La matrice R est triangulaire supérieure, car A_k s'exprime uniquement en fonction de $Q_1,\ldots,Q_k$. En outre, comme la base $Q_1,\ldots,Q_n$ est orthonormée, le coefficient $R_{i,j}$ vaut (A_j,Q_i). En particulier, $R_{i,i} = (A_i,Q_i) > 0$. Enfin, on a égalité $A = QR$: c'est une conséquence du fait que A est la matrice de passage de la base canonique à (a), Q celle de la base canonique à (q) et R celle de (q) à (a).

Remarque :

Des considérations topologiques permettent d'en déduire l'existence d'une factorisation QR lorsque A n'est plus inversible. A est en effet la limite d'une suite de matrices inversibles A_n, et chaque A_n se décompose en $A_n = Q_n R_n$. Maintenant, le groupe orthogonal est compact (il est fermé-borné), et donc une sous-suite $Q_{\varphi(n)}$ converge vers une matrice orthogonale Q. Mais alors, $R_{\varphi(n)}$ tend vers $Q^{-1}A$, et R est triangulaire supérieure.

Quatrième Partie

IV.A.1) Nous écrivons $M_k = (M_{i,j}^{(k)})$ et $N_k = (N_{i,j})^{(k)}$. Le coefficient (i,j) de $M_k N_k$ est : $\sum_{l=1}^n M_{i,l}^{(k)} N_{l,j}^{(k)}$. Cette somme finie converge, pour k tendant vers $+\infty$, vers $\sum_{l=1}^n M_{i,l} N_{l,j}$, qui est exactement le coefficient (i,j) de MN.

IV.A.2.a) Nous avons, pour tout X avec $\|X\| \leq 1$,

$$\|MNX\| \leq \|M\|\|N\|\|X\|.$$

On en déduit l'inégalité en passant au sup.

IV.A.2.b) C'est un raisonnement classique, qu'il faut savoir répéter. L'idée est de partir de l'identité :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + \cdots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

valide pour $|x| < 1$. Imitant cela, nous posons $N_l = I_n - M + \cdots + (-1)^l M^l$. N_l est une série absolument convergente dans un espace de Banach, puisque $\|(-1)^l M^l\| \leq \|M\|^l$, et $\sum_{l\geq 0} \|M\|^l$ converge. Soit N la somme de cette série. Calculons :

$$\begin{aligned} N_l(I_n + M) &= I_n - M + \cdots + (-1)^l M^l + M - M^2 + \cdots + (-1)^l M^{l+1} \\ &= I_n + (-1)^l M^{l+1} \end{aligned}$$

Maintenant, $I_n + (-1)^l M^{l+1}$ tend vers I_n, et donc $N(I_n + M) = I_n$. $I_n + M$ est donc inversible, d'inversible N.

IV.A.3) A est une matrice possédant n valeurs propres distinctes. Les théorèmes classiques de réduction des endomorphismes nous donne l'existence d'une telle décomposition.

IV.B. Nous prouvons par récurrence sur k que les A_k sont semblables à A. C'est bien sûr le cas pour A_1. Ensuite :

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^{-1} Q_k R_k Q_k = Q_k^{-1} A_k Q_k,$$

ce qui prouve que A_{k+1} est semblable à A_k, et par transitivité à A.

IV.C. Ecrivons $L = (L_{i,j})$, et $D^k L D^{-k} = (M_{i,j})$. Le calcul donne : $M_{i,j} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k L_{i,j}$. Les $|\lambda_i|$ ont été ordonnés de telle sorte que $D^k L D^{-k}$ converge vers I_n.

IV.D. E_k tend vers 0, en particulier, pour k assez grand, $\|RE_k R^{-1}\| < 1$. $I_n + RE_k R^{-1}$ est alors inversible, et on peut appliquer les résultats de la partie III.

IV.E.1) Pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$, on a : $(\widetilde{Q_k}x, \widetilde{Q_k}y) = (x,y)$. Le passage à la limite donne $(\widetilde{Q}x, \widetilde{Q}y) = (x,y)$: la matrice $\widetilde{Q}$ est orthogonale.

IV.E.2) Nous avons $\widetilde{R_k} = (I_n + RE_k R^{-1})\widetilde{Q_k}^{-1}$, et d'après IV.A.1), $\widetilde{R_k}$ converge. Comme $\mathcal{U}_n$ est stable par passage à la limite, $\widetilde{R}$ est dans $\mathcal{U}_n$. Par passage à la limite, $I_n = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ et donc $\widetilde{R}$ est inversible. Nous en déduisons que $R \in \mathcal{U}_n^+$.

IV.E.3) Par unicité de la factorisation QR, il vient $I_n = \widetilde{Q} = \widetilde{R}$.

IV.F. Montrons que $A^k = (Q_1 \ldots Q_k)(R_k \ldots R_1)$. En effet :

$$\begin{aligned} (Q_1 \ldots Q_k)(R_k \ldots R_1) &= Q_1 \ldots Q_{k-1} A_k R_{k-1} \ldots R_1 \\ &= Q_1 \ldots Q_{k-1} R_{k-1} Q_{k-1} R_{k-1} R_{k-2} \ldots R_1 \\ &= Q_1 \ldots Q_{k-2} A_{k-1}^2 R_{k-2} \ldots R_1 \end{aligned}$$

En itérant le procédé, on trouve successivement que :

$$\begin{aligned} (Q_1 \ldots Q_k)(R_k \ldots R_1) &= Q_1 \ldots Q_{k-1} A_{k-2}^3 R_{k-1} \ldots R_1 \\ &= \ldots \\ &= A_{k-(k-1)}^k = A^k. \end{aligned}$$

Pour la deuxième décomposition QR de A^k, on introduit les résultats des question IV.C. et suivantes:

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= QRD^kLU \\ &= QRD^kLD^{-k}R^{-1}RD^kU \\ &= Q(I_n + RE_kR^{-1})RD^kU. \end{aligned}$$

Pour k assez grand, $I_n + RE_kR^{-1} = \widetilde{Q_k}\widetilde{R_k}$. Et donc $A^k = Q\widetilde{Q_k}\widetilde{R_k}RD^kU$. Par unicité de la décomposition QR, nous obtenons : $Q\widetilde{Q_k} = Q_1 \dots Q_k$, et $\widetilde{R_k}RD^kU = R_k \dots R_1$. Nous obtenons donc que :

$$\begin{aligned} R_kQ_k &= \widetilde{R_k}RD^kUR_1^{-1} \dots R_{k-1}^{-1}Q_{k-1}^{-1} \dots Q_1^{-1}Q\widetilde{Q_k} \\ &= \widetilde{R_k}RD^kU(A^{k-1})^{-1}Q\widetilde{Q_k} \\ &= \widetilde{R_k}RD^kUPD^{-(k-1)}P^{-1}Q\widetilde{Q_k} \\ &= \widetilde{R_k}R \times D^kL^{-1}D^{-k} \times DR^{-1}\widetilde{Q_k} \end{aligned}$$

et donc R_kQ_k converge vers $RDR^{-1} = D$. Ouf!