Concours Centrale-Supélec 2001 PSI - Sujet 1 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : Espaces euclidiens, suites orthonormales, fonctions lipschitziennes, polynômes de Legendre, séries de Fourier, projection orthogonale

Commentaires : Problème assez classique, très complet, puisque basée sur de l'analyse préhilbertienne. Difficulté "normale".

Première Partie

I.A. C'est un bon moyen de réviser ses formules de trigo (ou le manuel de sa calculatrice!). Rappelons que :

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p+q) + \cos(p-q)].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(C_m|C_n) &= 2\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx \\ &= \int_0^1 \cos((n+m)\pi x) + \cos((n-m)\pi x)dx\end{aligned}$$

qui fait 0 si $n \neq m$, et 1 si $n = m$. De même pour la famille S_n.

I.B.1) D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|f\|^2 = \|\Pi_\phi^n(f)\|^2 + \|f - \Pi_\phi^n(f)\|^2,$$

ce qui donne :

$$\|f\|^2 \geq \|\Pi_\phi^n(f)\|^2 + [d_\phi^n(f)]^2.$$

- Premier cas : On sait que $d_\phi^n(f) = \|f - \Pi_\phi^n(f)\|$, et c'est fini!
- Deuxième cas : on l'a oublié, et on le redémontre! On décompose f en 3, pour tout v dans V_ϕ^n :

$$\begin{aligned}\|f-v\|^2 &= < f - \Pi_\phi^n(f) + \Pi_\phi^n(f) - v | f - \Pi_\phi^n(f) + \Pi_\phi^n(f) - v > \\ &= \|f - \Pi_\phi^n(f)\|^2 + \|\Pi_\phi^n(f) - v\|^2 + 2(f - \Pi_\phi^n(f)|\Pi_\phi^n(f) - v) \\ &= \|f - \Pi_\phi^n(f)\|^2 + \|\Pi_\phi^n(f) - v\|^2 \\ &\geq \|f - \Pi_\phi^n(f)\|^2.\end{aligned}$$

Ceci achève de prouver que $d_\phi^n(f)^2 = \|f - \Pi_\phi^n(f)\|^2$.

I.B.2)D'après la question précédente :

$$\|\Pi_\phi^n(f)\|^2 \leq \|f\|^2 = 1.$$

Maintenant, si $f \in V_\phi^n(f)$, alors $\Pi_\phi^n(f) = f$, et donc :

$$\sup_{\|f\|=1} \|\Pi_\phi^n(f)\| = 1.$$

I.B.3) Posons $g = \sum_{j=0}^n (f|\phi_j)\phi_j$. Alors :

- $g \in V_\phi^n$.
- Pour tout j dans $0,\dots,n$, alors $(g - f|\phi_j) = (f|\phi_j) - (f|\phi_j) = 0$, et par combinaison linéaire, $g - f$ est orthogonal au sev V_ϕ^n.

Nous avons donc $g = f$. En particulier, le calcul de $\|\Pi_\phi^n(f)\|^2$ nous dit que :

$$\sum_{k=0}^n (f|\phi_k)^2 \leq \|f\|^2.$$

La série de terme général positif $(f|\phi_k)^2$ est majorée et est donc convergente. Le passage à la limite dans l'inégalité précédente correspond au résultat désiré, qui s'appelle *inégalité de Bessel*.

I.C.1)a)Soit N tel que $f_k \in V_\phi^N$. Alors, pour $n \geq N$, on a : $\Pi_\phi^n(f_k) = f_k$, et donc :

$$f - \Pi_\phi^n(f) = f - f_k + \Pi_\phi^n(f_k - f).$$

I.C.1)b)Soit $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_k\| \leq \varepsilon$, et N donné par le a. Alors, pour $n \geq N$,

$$\|f - \Pi_\phi^n(f)\| \leq \|f - f_k\| + \|\Pi_\phi^n(f_k - f)\| \leq 2\varepsilon.$$

I.C.2)

- $i \implies ii$: Si ϕ est totale dans E, alors pour tout $f \in E$, on peut trouver une suite (f_k) qui converge vers f, et la question précédente entraîne ii.
- $ii \implies i$: Soit $f \in E$, et $f_n = \Pi_\phi^n(f)$. Alors la suite (f_n) est dans V, et (f_n) converge vers f dans E : ϕ est totale dans E.

I.C.3) Si ϕ est totale dans E, alors $\Pi_\phi^n(f)$ converge vers f dans E, et en particulier $\|\Pi_\phi^n(f)\|^2$ converge vers $\|f\|^2$. Donc on a égalité dans l'inégalité de Bessel, et :

$$\|f\|^2 = \sum_{k\geq 0} (f|\phi_k)^2 \text{ et } d_\phi^n(f)^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (f|\phi_k)^2.$$

I.D.1) Nous raisonnons par analyse-synthèse. Si un tel $\tilde{f}$ existe, alors $\tilde{f}(-x) = f(x)$ défini $\tilde{f}$ sur $[-1,0]$, et la 2-périodicité détermine uniquement $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, un tel $\tilde{f}$ convient. La seule chose à réellement démontrer est la continuité en 0, qui est conséquence du prolongement par *parité* de $\tilde{f}$.

I.D.2) Il y a (au moins) deux façons de répondre à cette question :

1. La fonction paire h invoquée par l'énoncé a ses coefficients de Fourier en sinus nuls, et la n-ième somme partielle de sa série de Fourier est exactement ... $\Pi_\phi^n(f)(\frac{x}{2\pi})$. Le théorème de Parseval se traduit par $\|\Pi_\phi^n(f) - f\|$ tend vers 0, ce qui prouve que C est total dans E. Le problème est que ce raisonnement se mord la queue (aie!), car justement, pour pouvoir démontrer le théorème de Parseval, on a quelque part besoin de savoir que C est total dans E!!
2. On utilise d'abord un théorème du type théorème de Féjer, ou de Weierstrass, pour prouver que h est limite uniforme de polynômes trigonométriques P_n (uniquement en cosinus). Puis on utilise une inégalité du type $\|g\| \leq \|g\|_\infty$ pour tout g dans E. En particulier, $\|f(x) - P_n(2\pi x)\| \leq \|h - P_n\|_\infty$. C'est plus correct mathématiquement.

I.D.3) Il suffit d'enlever un vecteur d'une suite orthonormale totale. Par exemple, $\phi = (C_n, n \geq 1)$ n'est pas totale dans E. En effet :

$$\|\Pi_\phi^n(1) - 1\| = 1, \text{ pour tout } n.$$

Deuxième Partie

II.A.1)Le fait que $Lip(I,\mathbb{R})$ est un sev est vraiment évident. En revanche, si par exemple $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = g(x) = x$, alors f et g sont lipschitzienne, mais fg ne l'est pas! Si I est compact, c'est une autre histoire!

Si f est lipschitzienne,

$$\left\{\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| ;\ (x,y) \in I^2,\ x \neq y\right\}$$

est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. En particulier, elle admet une borne supérieure.

II.A.2) Remarquons d'abord que $\sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$ (car son taux d'accroissement en 0 n'est pas borné!). Si I est compact, et si f et g sont lipschitziennes, écrivons :

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = (f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y)).$$

Mais f et g sont continues sur I compact, et donc il existe un réel M tel que $|f| \leq M$, $|g| \leq M$, sur I. En particulier :

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M(k(g) + k(f))|x - y|,$$

et $Lip(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $C^0(I,\mathbb{R})$.

II.B. Attention! Dans l'énoncé de cette question, il faut lire f lipschitzienne et non f'! D'abord, si $|f'|$ est bornée sur I, par le théorème des accroissements finis,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \sup_I |f'|,$$

et donc $k(f) \leq \sup |f'|$. Réciproquement, si f est lipschitzienne,alors pour tout x dans I, pour tout h non nul assez petit,

$$\frac{|f(x + h) - f(x)|}{h} \leq k(f),$$

et par passage à la limite $|f'(x)| \leq k(f)$.

II.C. Si M est un réel plus grand que tous les $k(f_n)$, le passage à la limite dans $|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|$ montre que f est lipschitzienne.

II.D.1) En posant $\tilde{g}(x) = g(0)$ si $x < 0$, $\tilde{g}(x) = g(1)$ si $x > 1$, on vérifie aisément que $\tilde{g}$ convient.

II.D.2) D'après le théorème fondamental du calcul intégral, g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$g_n'(x) = n \times [\tilde{g}(x + 1/n) - \tilde{g}(x)] \leq 1.$$

En outre :

$$|g_n(x) - \tilde{g}(x)| \leq n \int_x^{x+1/n} |\tilde{g}(t) - g(x)|dt \leq n \int_x^{x+1/n} |t - x|dt \leq \frac{1}{2n}.$$

La suite (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{g}$.

II.E.1)Nous faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
(f|C_n) &= \int_0^1 f(x)\sqrt{2}\cos(n\pi x)dx \\
&= \left[\frac{\sqrt{2}}{n\pi}\sin(n\pi x)f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 f'(x)\sin(n\pi x)dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}(f'|S_{n-1})
\end{aligned}$$

II.E.2)Comme la famille (S_n) est orthonormale, la série de terme général $(f'|S_{n-1})^2$ converge, et on a l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(f'|S_{n-1})^2 \leq \|f'\|^2.$$

II.E.1) donne alors immédiatement le résultat.

II.F.1) Nous pouvons toujours supposer que $k(f) = 1$. D'après II.D.2), il existe une suite (f_j) de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$, à dérivée bornée par 1, qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, en particulier sur [0,1]. Pour tout n, nous avons $(f_j|C_n)^2$ qui converge vers $(f|C_n)^2$. Maintenant, pour chaque j, comme f_j est C^1, nous savons que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f_j|C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}.$$

Le théorème de convergence monotone (ou bien la considération de n'importe quelle somme finie) nous permet de passer à la limite dans l'inégalité précédente; et d'en déduire le résultat demandé.

II.F.2) On a successivement :

$$[d_C^{n-1}(f)]^2 \leq \sum_{k=n}^{+\infty}(f|C_k)^2 = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k^2(f|C_k)^2}{k^2} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=n}^{+\infty}k^2(f|C_k)^2 \leq \frac{k(f)^2}{n^2\pi^2}.$$

Troisième Partie

III.A. Comme on peut s'en douter vu l'énoncé de la question, nous allons procéder par récurrence. Attention, la récurrence sur m ne donne rien d'évident, nous procédons donc par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$, quelque soit m : en effet, d'après les résultats de la partie I. nous avons :

$$\begin{aligned}\|\psi_j\|^2 &= \|\Pi_\phi^0(\psi_j)\|^2 + d_\phi^0(\psi_j)^2 \\ &= (\psi_j|\phi_0)^2 + d_\phi^0(\psi_j)^2.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$1 + \sum_{j=0}^{m} d_\phi^0(\psi_j)^2 = m + 2 - \sum_{j=0}^{m}(\psi_j|\phi_0)^2.$$

Pour conclure pour le cas $n = 1$, il suffit de remarquer que

$$\sum_{j=0}^{m}(\psi_j|\phi_0)^2 \leq \|\phi_0\|^2 = 1.$$

Supposons maintenant que le résultat est vérifié au rang n, et prouvons-le au rang $n+1$. Comme $d_\phi^n(\psi_j)^2 = \|\psi_j\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(\psi_j|\phi_k)^2$, nous savons que :

$$d_\phi^n(\psi_j)^2 = d_\phi^{(n-1)}(\psi_j)^2 - (\psi_j|\phi_n)^2.$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}(n+1) + \sum_{j=0}^{m} d_\phi^n(\psi_j)^2 &= n + \sum_{j=0}^{m} d_\phi^{n-1}(\psi_j)^2 + 1 - \sum_{j=0}^{m}[\psi_j|\phi_n)^2 \\ &\geq m + 1 + 1 - \|\phi_n\|^2 \geq m + 1.\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $m = 2n - 1$, on en déduit la deuxième inégalité demandée.

III.B. Remarquons avant de résoudre les questions qui suivent qu'il y a ici probablement une petite erreur d'énoncé. Il est probable que l'auteur du sujet souhaitait parler d'une suite $\psi = (\psi_j)$ orthonormale constituée de fonctions lipschitziennes!

III.B.1) On combine le résultat de la question III.A.,où $\phi = C$, et II.F.2.

III.B.2) Si $(k(\psi_j))$ était bornée, avec par exemple $k(\psi_j) \leq M$, nous aurions: $\pi^2 n^3 \leq \sum_{j=0}^{2n-1} k(\psi_j)^2 \leq M^2(2n)^2$. Ceci est impossible pour de grandes valeurs de n.

III.B.3) C'est une question à la fois très facile et très difficile: elle est très facile si on la prend par le bon bout! Mais la prendre par le bon bout est très difficile! Supposons que $\lim_{n\to+\infty} k(\psi_n) \neq +\infty$, et considérons une sous-suite (ψ_{n_j}) telle que $(k(\psi_{n_j}))$ soit bornée. On note alors $\phi_j = \psi_{n_j}$ qui donne une suite orthonormale de fonctions lipschitziennes. L'application de III.B.1) dit que la suite $(k(\phi_j))$ n'est pas bornée, ce qui, bien sûr, contredit notre hypothèse! Élémentaire, non?

III.B.4) D'après II.B. on a $k(C_n) = \sqrt{2}\pi n$.

III.B.5) En utilisant la croissance des $(k(\psi_j))$, nous avons:

$$\begin{aligned} 2nk(\psi_{2n-1})^2 &\geq \sum_{j=0}^{2n-1} k(\psi_j)^2 \\ &\geq \pi^2 n^3. \end{aligned}$$

Ceci donne en particulier que $\psi_{2n-1} \geq \Gamma_1 n$. La croissance de (ψ_j) permet de traiter aussi le cas des indices pairs.

Walter Rudin est un grand mathématicien du XXiè siècle, d'origine autrichienne, mais exilé aux Etats-Unis. On lui doit de nombreux travaux en analyse de Fourier (notamment sur des groupes abéliens compacts abstraits), et aussi de nombreux ouvrages pédagogiques qui sont des références! Citons le célèbre *Analyse réelle et complexe* que tout étudiant de mathématiques en licence, en maîtrise, et au-delà, se doit d'avoir lu!

Quatrième Partie

IV.A. Nous avons:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q_n(x)Q_m(x)dx &= \int_0^1 \frac{\alpha_n\alpha_m}{2^n n! 2^m m!} \times P_n(2x-1)P_m(2x-1)dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\alpha_n\alpha_m}{2^{n+m+1} n! m!} P_n(u)P_m(u)du. \end{aligned}$$

Si $n \neq m$, on trouve 0. Si $n = m$, alors:

$$\int_0^1 Q_n(x)Q_n(x)dx = \frac{\alpha_n^2}{2n+1}.$$

Pour l'unique valeur $\alpha_n = \sqrt{2n+1}$ on trouve bien que Q est une suite orthonormale de E.

IV.B.1) L'espace vectoriel sur lequel on projette est de plus en plus gros. Il est donc évident que la suite $(d_Q^n(f))$ est décroissante!

IV.B.2) On montre aisément que L_n est un polynôme de degré n, et donc V_Q^n est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $\varepsilon > 0$, et $f \in E$. Il existe P un polynôme tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$. On prouve aisément que $\|f - P\| \leq \|f - P\|_\infty$. Si nous notons n le degré de P, nous avons $d_Q^n(f) \leq \varepsilon$. Il ne reste plus qu'à utiliser la décroissance de la suite $(d_Q^n(f))$.

IV.B.3) Nécessairement, chaque ϕ_n se décompose en $a_0Q_0 + \cdots + a_nQ_n$. Par récurrence sur n, nous prouvons que $\phi_n = Q_n$. Pour $n = 0$, le résultat est clair car $\phi_0 = Q_0 = 1$, qui est l'unique fonction constante de norme 1 dans E. Prouvons le résultat au rang n s'il est vrai au rang $n-1$. Pour $k \leq n-1$, nous avons :

$$a_k = (\phi_n | Q_k) = (\phi_n | \phi_k) = 0.$$

Le fait que $\|\phi_n\| = 1$ impose que $a_n = 1$.

IV.C. Nous appliquons la formule de Leibniz, en remarquant que $U_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k [(x-1)^n]^{(n-k)}[(x+1)^n]^{(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_n^k (n-k)!k!(x-1)^k(x+1)^{n-k} \\
&= n! \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k\right)^2 (x-1)^k(x+1)^{n-k}
\end{aligned}$$

IV.D.1) Ecrivons que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}e^{i\theta}\right)^n \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}e^{-i\theta}\right)^n d\theta \\
&= \frac{1}{2^n 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-x)^{k/2} i^k e^{ik\theta}(1+x)^{(n-k)/2}\right) \times \\
&\qquad \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-x)^{k/2} i^k e^{-ik\theta}(1+x)^{(n-k)/2}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, nous développons le polynôme trigonométrique à l'intérieur de l'intégrale. Mais rappelons que si $P(\theta) = \sum_{-p}^{q} c_k e^{ik\theta}$, alors $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\theta)d\theta = c_0$. Il suffit de garder le terme constant quand on développe. Les précédentes intégrales sont donc égales à :

$$\frac{1}{2^n 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 (1-x)^k(-1)^k(x+1)^{n-k} d\theta = L_n(x).$$

IV.D.2) Nous avons :

$$\begin{aligned}
|L_n(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^n d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x^2\sin^2\theta + \cos^2\theta|^{n/2} d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin^2\theta + \cos^2\theta|^{n/2} d\theta \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

En outre, pour $x = \pm 1$, on peut remarquer que partout on a des égalités. En revanche, si $x \neq \pm 1$, le passage de la deuxième à la troisième ligne donne une inégalité stricte.

IV.E.1) Dérivons $n+1$ fois l'égalité $(x^2-1)U_n'(x) = 2nxU_n(x)$:

$$(x^2-1)U_n^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xU_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)U_n^{(n)}(x) = 2nxU_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1)U_n^{(n)}(x).$$

En regroupant les termes, et en remplaçant $U_n^{(n)}$ par P_n, on trouve :

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

IV.E.2) Il faut commencer par relier P'_{n+1} et les dérivées de P_n. Nous avons :

$$\begin{aligned}
[U_{n+1}^{(n+1)}]' &= [(x^2-1)U_n]^{(n+2)} \\
&= (x^2-1)U_n^{(n+2)} + 2(n+2)xU_n^{(n+1)} + (n+2)(n+1)U_n^{(n)} \\
&= (x^2-1)P''_n + 2(n+2)xP'_n + (n+2)(n+1)P_n.
\end{aligned}$$

En combinant cela avec le résultat précédent, on en déduit :

$$P'_{n+1} = 2(n+1)xP'_n + (n+1)(2n+2)P_n.$$

En divisant par $\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$, on obtient le résultat.

IV.F. Nous prouvons que $k(Q_n) = n(n+1)\sqrt{2n+1}$. Il suffit pour cela de prouver que $k(L_n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Plus précisément, nous prouvons par récurrence sur n que $k(L_n) = \frac{n(n+1)}{2}$, et que $L'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$. Le résultat est clairement vrai pour $n = 0$. Maintenant, si le résultat est vrai au rang n, IV.E.2) donne d'une part que $L'_{n+1}(1) = L'_n(1) + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, et d'autre part que $k(L_{n+1}) \leq k(L_n) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. C'est tout! Pour la suite (Q_n), on a une minoration bien plus forte que celle donnée par le résultat de la partie III.