Concours Centrale-Supélec 2001 PC - Sujet 2 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart et est disponible à l'adresse suivante : http://mathweb.free.fr
Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : théorème de la base incomplète, homothétie, sev stable, diagonalisation, matrice, dimension

Commentaires : Ce problème est très classique, et assez simple, hormi la dernière question. Il explore tout le programme d'algèbre linéaire, et constitue une révision de premier choix dans cette optique.

Première Partie

I.A.1. Nous distinguons les deux cas proposés :

a) Si (x,y) est liée, $y = \lambda x$. On considère l'homothétie $A = \lambda I$.

b) Si (x,y) est libre, par le théorème de la base incomplète, on complète (x,y) en $(x,y,f_3,\dots,f_n)$ base de V. On considère alors l'endomorphisme A défini par $Ax = y$, $Ay = x$ et $Af_i = f_i$ (rappelons qu'un endomorphisme est uniquement défini par l'image d'une base, et que c'est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base). Alors A est une matrice inversible.

Si W est un sev de V stable par $\mathcal{L}$, on suppose $W \neq \{0_V\}$, et soit $y \in V$, $x \in W$ non nuls tous les deux. Alors il existe A de $\mathcal{L}$ tel que $Ax = y$, et donc $y \in A(W) = W$. En particulier, $W = V$, et $\mathcal{L}$ vérifie P_6.

I.A.2.

- P_1 : non, mais P_2 oui : une matrice est dans $\mathcal{L}$ si, et seulement si, elle est de rang n.
- P_3 : oui! Car I est de rang n.
- P_4 : non! $I - I = 0 \notin \mathcal{L}$ prouve que $\mathcal{L}$ n'est pas stable par combinaisons linéaires.
- P_5 : oui! En effet, $A \in \mathcal{L} \iff \det(A) \neq 0$. Mais si A,B sont dans $\mathcal{L}$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, et donc $AB \in \mathcal{L}$.

I.B.1. Si $T \in \mathcal{L}$, et $T = (T_{k,m})$, alors $T(e_n) = \sum_{j=1}^{n} t_{j,n}e_j = t_{n,n}e_n$. Donc e_n est vecteur propre de tout T de $\mathcal{L}$. En particulier, si on pose $W = vect(e_n)$, alors W est un sev de V, non réduit au singleton $\{0_V\}$ ni égal à V, et stable par $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ ne vérifie donc pas P_6.

I.B.2.

- P_1 : oui! Par exemple, $E_{1,1}$ est dans $\mathcal{L}$.
- P_2, P_3 : oui! Car I est triangulaire inférieure.
- P_4 : oui! $\mathcal{L}$ est l'espace vectoriel engendré par les $E_{k,m}$, pour $k \leq m$.
- P_5 : oui! Il suffit de vérifier en faisant le produit de deux matrices triangulaires inférieures!

I.C.1. Si $A \in \mathcal{L}$, d'après les propriétés P_3 et P_4, $A - \lambda I$ est dans $\mathcal{L}$, et le rang de cette matrice est donc 0 ou 2. Maintenant, si on suppose que A n'est pas une homothétie vectorielle, alors A possède deux valeurs propres distinctes qui sont λ_1 et λ_2 (nous travaillons sur le corps des nombres complexes). Mais alors $A - \lambda_1 I$ n'est pas de rang 2, car λ_1 est valeur propre, mais n'est pas non plus de rang 0, car sinon A serait l'homothétie $\lambda_1 I$. Notre hypothèse est donc fausse, et tous les éléments de

$\mathcal{L}$ sont des homothéties vectorielles. Comme la réciproque est trivialement vérifiéé (I est dans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est stable par multiplication par un scalaire), $\mathcal{L}$ est exactement l'ensemble des homothéties vectorielles.

I.C.2. Si P_1 n'est pas vérifiée par $\mathcal{L}$, alors $\mathcal{L}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles, et par exemple $W = vect(e_1)$ est stable par $\mathcal{L}$. P_6 n'est alors pas vérifiée. Par contraposée, si $\mathcal{L}$ vérifie P_6, alors $\mathcal{L}$ vérifie P_1.

Deuxième Partie

II.A. Notons $W = \{Nz_1;\ N \in \mathcal{L}\}$. Comme $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E, il en est de même de W. Maintenant, la stabilité de $\mathcal{L}$ par produit matriciel assure que W est stable par $\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ vérifie P_6, on a $W = \{0_V\}$, ou $W = V$. Mais $z_1 \in W$, car $I \in \mathcal{L}$, et $z_1 \neq 0$. C'est donc que $W = V$.
Si (M_1,M_0) n'est pas libre, soit $\lambda,\mu \neq (0,0)$ tels que $\lambda M_1 + \mu M_0 = 0$. Nous appliquons en x_1 :

$$\lambda M_0 N_0 M_0 x_1 + \mu M_0 x_1 = \lambda z_1 + \mu z_2 = 0.$$

Ceci contredit que (z_1,z_2) est une famille libre.

II.B. Si $z \in M_0(V)$, $z = M_0 x$ et $M_0 N_0 z = M_0(N_0 M_0 x)$: $M_0(V)$ est stable par $M_0 N_0$. Comme on est sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, l'endomorphisme $M_0 N_0$ restreint à $M_0(V)$ admet une valeur propre α. Le choix d'un vecteur propre non nul pour cette valeur propre donne le résultat souhaité.
On a alors $M_1 - \alpha M_0 = (M_0 N_0 - \alpha I)M_0$, et $rg(M_1 - \alpha M_0) \leq rg(M_0)$. Mais $M_0 N_0 - \alpha I$ n'est pas inversible sur $M_0(V)$. L'inégalité précédente est donc stricte (appliquer le théorème du rang à $M_1 - \alpha M_0$ restreint à $M_0(V)$). En outre, $rg(M_1 - \alpha M_0) > 0$, car (M_0,M_1) est une famille libre.
Mais alors :

$$M_1 - \alpha M_0 \in \mathcal{L}, \quad \text{et} \quad 0 < rg(M_1 - \alpha M_0) < rg(M_0).$$

Ceci contredit la minimalité de m. Et donc $m = 1$.

Troisième Partie

III.A. Soit $F = \{M \in E;\ M(W) \subset W\}$. F est clairement un sev de E, et il contient $\mathcal{L}$. Soit $\{f_1,\dots,f_k\}$ une base de W, qu'on complète en $\{f_1,\dots,f_n\}$ base de E. On note $W' = vect\{f_{k+1},\dots,f_n\}$, qui est un supplémentaire de W. $M \in F$ se décompose en $M = M_1 \oplus M_2$, où M_1 envoie W dans W, et M_2 envoie W' dans E. Autrement dit, F se décompose en $F_1 \oplus F_2$, où :

- $F_1 = \{M \in E;\ M(W) \subset W \text{ et } M|_{W'} = 0\}$.
- $F_2 = \{M \in E;\ M|_W = 0 \text{ et } M(W') \subset E\}$.

Maintenant, $dim(L(W,W)) = (dimW)^2 = k^2$, tandis que $dim(L(W',E)) = dimW'dimE = (n-k)n = n^2 - kn$. On a donc $dimF = n^2 - kn + k^2 = n^2 - k(n-k)$.
Maintenant, $dimF \geq n^2 - 1$ car $\mathcal{L} \subset F$, et donc $1 \geq k(n-k)$. Comme $n > 2$, $k = 0$ ou $k = n$, et donc $W = \{0_V\}$ ou $W = V$.

III.B.1. On a $dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geq 1$, car $\mathcal{H}$ est de dimension 2, et $\mathcal{L}$ est de dimension $\geq n^2 - 1$: ces deux sev ne peuvent être en somme directe. Soit $aE_{k,m} + bI \in \mathcal{L}$. Alors d'après (*), $b \neq 0$, et $aE_{k,m} + bI$ est inversible.

III.B.2. $E_{2,1} + E_{3,2} + \dots + E_{m,m-1} + E_{1,m}$ est une matrice inversible, et est dans $\mathcal{L}$. Dans tous les cas, $\mathcal{L}$ possède une matrice inversible A.

III.C. La famille $(A,A^2,\dots,A^{n^2+1})$ est une famille de n^2+1 éléments, dans un espace vectoriel de dimension n. C'est donc une famille liée. Soit $p,k > 0$ des entiers, et $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ des nombres complexes pour lesquels :

- $\lambda_0 \lambda_p \neq 0$.

– $\lambda_0 A^k + \lambda_1 A^{k+1} + \cdots + \lambda_p A^{k+p} = 0$. Comme A^k est inversible, on simplifie par A et on obtient la relation demandée.

Maintenant, $I = \frac{1}{\lambda_0}(-\lambda_1 A - \cdots - \lambda_p A^p)$. Le membre de droite de l'égalité est élément de $\mathcal{L}$ car $A \in \mathcal{L}$, et $\mathcal{L}$ est stable par produit matriciel et combinaison linéaire.

III.D. D'abord, C_u est un sous-espace vectoriel. Soit $y \in C_u$, et $M \in \mathcal{L}$. Alors, pour tout L dans $\mathcal{L}$, on a :

$$({}^t\bar{L}u, My) = {}^t\,\bar{y}\,{}^t\bar{M}\,{}^t\bar{L}u = {}^t\,\bar{y}\,{}^t\overline{LM}u = ({}^t\overline{LM}u, y) = 0$$

car ${}^t\overline{(LM)}v \in B_v$. En outre, $u \in B_u$ car on vient de prouver que $I \in \mathcal{L}$. Par P_6, on a : $C_u = \{0\}$ ou $C_u = V$. Ce deuxième cas est impossible, car il imposerait $B_u = \{0\}$. Donc $C_u = \{0_V\}$ et $B_u = V$.
Pour A_u, il faut un peu d'astuce. Notons $\mathcal{L}' = \{\,{}^t\bar{L};\ L \in \mathcal{L}\}$. Alors, comme $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ est un sev de E de dimension $\geq n^2 - 1$, qui vérifie P_3, P_4, P_1 et P_6. Par le calcul déjà fait, $B'u = \{{}^t\bar{M}u;\ M \in \mathcal{L}'\} = V$. Mais $A_u = B'_u$!!! Et donc $A_u = V$.
Comme $x \in A_{v_0}$, et $y \in B_{w_0}$, il existe $L, M \in \mathcal{L}$ tels que $Lv_0 = x$ et ${}^t\bar{M}w_0 = y$. Maintenant, toute matrice de rang 1 s'obtient comme produit $x{}^t\bar{y}$, où $x, y \in V - \{0\}$. Mais :

$$x{}^t\bar{y} = Lv_0\ {}^t\bar{w}_0 M \in \mathcal{L}$$

où on utilise la stabilité par produit matriciel. Comme E est engendré par les matrices de rang 1, par exemple les $E_{k,n}$, on a $\mathcal{L} = E$.