Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le problème posé cette année aux candidats étudiait la transformation de Radon sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$.

La première partie étudiait le groupe des isométries affines du plan (vu comme un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$) et de son action sur les droites affines du plan. Les parties II, III et IV mettaient en place l'étude de la transformation de Radon, ainsi que la formule d'inversion. La partie II, introductive, était dévolue à l'étude de la classe des fonctions radiales, la partie III au lien entre la transformation de Radon (intégrale sur des droites) aux intégrales sur les cercles, tandis que la partie IV mettait en place la formule d'inversion. Enfin, la dernière partie proposait une interprétation de la transformation de Radon, dans l'objectif d'en présenter une application à la radiographie.

Pour cette année de réforme des programmes, le concepteur du sujet a pris soin d'inscrire les questions posées dans le cadre strict du programme officiel. Ainsi, par exemple, l'interversion d'intégrales nécessaire dans la partie IV, était-elle admise par les candidats.

Analyse globale des résultats

Le sujet était assez facile dans les deux premières parties, ce qui a permis aux candidats d'aborder le plus souvent une partie significative du sujet. Les troisième et quatrième partie étaient plus techniques et ont été de fait plus discriminantes. La dernière partie était finalement assez facile, mais demandait aux étudiants de produire un effort de synthèse et d'interprétation sur les propriétés démontrées aux parties précédentes.

Toutes les parties ont été abordées avec profit et une quarantaine de candidats s'est distinguée en traitant le sujet à peu près dans sa totalité.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Dans la sous-partie **I.A**, beaucoup de candidats ont considéré (en **I.A.3**) que l'inverse d'une matrice de G devait nécessairement se trouver dans G, alors qu'il ne s'agit que d'une condition suffisante. La vérification des axiomes de sous-groupe est plutôt connue. Une forte minorité de candidats a voulu au **I.A.5** utiliser la linéarité de Φ, ce qui est hors sujet puisque l'ensemble de départ n'est pas un espace vectoriel.

La sous-partie **I.B** a posé des difficultés aux candidats. Les notions d'équation cartésienne, et de paramétrisation des droites, découvertes en terminale, sont rarement reliées aux outils et concepts vus depuis (utilisation du produit scalaire pour caractériser l'orthogonalité, notion de paramétrisation de courbe). La question **I.B.4** n'a pas eu de succès, la plupart des candidats produisant de grosses erreurs de logique.

Globalement, la sous-partie **I.C** a été plus réussie.

Dans la partie II, ainsi que les suivantes, il était demandé aux candidats de réaliser plusieurs calculs d'intégrales dont le résultat était donné. Même si les calculatrices étaient autorisées, on attendait des étudiants qu'ils réalisent et expliquent leurs calculs de façon convaincante. Le fait de donner les résultats sans aucune explication est perçu comme une tentative de bluff, et sanctionné comme tel. Le jury a apprécié et parfois valorisé l'honnêteté intellectuelle de certains, qui précisent que le résultat obtenu l'a été grâce à la calculatrice.

Dans la sous-partie **II.B**, l'étude de la convergence des intégrales nécessitait de traiter le cas des deux bornes. Par ailleurs, une grosse majorité des candidats pense à tort que si $h(x)$ est équivalente à x en $+\infty$ et que φ est intégrable en $+\infty$, alors il en est de même de $\varphi(h(x))$. La problématique étudiée ici est celle du changement de variable ; si les candidats savent bien le réaliser, rares sont ceux qui connaissent le cadre théorique d'utilisation et savent exploiter les propriétés de conservation de la convergence des intégrales.

La partie III demandait l'application de deux théorèmes de continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres. Ces questions ont été extrêmement sélectives, la principale difficulté concerne la compréhension de la notion de fonction, dans un contexte de fonctions de deux variables. Le jury invite les futurs candidats à toujours préciser pour chaque fonction utilisée, la nature des variables. Cela permettrait peut-être d'éviter de voir que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^2$, est « intégrable sur $\mathbb{R}^2$ », ou « continue sur $[0, 2\pi]$ », ou encore « continue par rapport à ses deux variables ». De la même façon, la distinction entre variable d'intégration et paramètre n'était pas apparente dans la majorité des copies.

Enfin, la partie IV faisait la part belle à l'utilisation fine des théorèmes du chapitre d'intégration. Lors de l'utilisation de l'intégration par parties à la question **IV.C.2**, la majorité des candidats s'est bien préoccupée de la convergence du crochet, mais pas de la convergence de l'une au moins des deux intégrales concernées.

Conclusion

La grande progressivité du sujet a permis à l'ensemble des candidats de s'exprimer de façon différenciée, ce qui est l'objectif principal d'un problème de concours. Le jury a constaté avec plaisir que les recommandations des précédents rapports ont été mises à profit par un bon nombre de candidats, ce qui témoigne de la qualité de la préparation qu'ils ont effectuée.