PSI

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE

DE MATHÉMATIQUES

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Rappelons que le sujet de mathématiques est écrit pour évaluer les compétences des candidats sur une large partie du programme de PSI. Parmi ces compétences sont systématiquement évaluées :

- la connaissance précise des énoncés et démonstrations des résultats du cours et la capacité à les appliquer ;
- la qualité d'exposition d'un argument, la rigueur ;
- la présentation de la copie.

S'il est important de mentionner à nouveau que dans l'ensemble les copies sont bien présentées, les questions numérotées, les résultats mis en évidence et les conclusions rédigées, il est tout aussi important de souligner que la rédaction manque trop souvent de rigueur et de précision. Des arguments sont absents, les hypothèses des résultats utilisés ne sont pas toujours vérifiées et les conclusions sont données trop rapidement. Il ne suffit pas d'affirmer la conclusion, il faut prouver les affirmations.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet de cette année était constitué d'un exercice et de deux problèmes, ce qui a permis de traiter de nombreux points du programme. Les candidats avaient la possibilité d'optimiser leur épreuve grâce aux questions indépendantes. Dans les deux problèmes, il y avait un grand nombre de questions très simples et guidées permettant d'aller assez loin dans le sujet, et quelques questions plus fines et difficiles qui intervenaient toujours en fin de partie. Ces questions plus difficiles ont été abordées par une minorité. Les questions plus abordables ont été repérées par les candidats sans pour autant avoir été toujours bien traitées.

L'exercice portait sur les extrema d'une fonction de deux variables. Ce sujet est en général assez peu abordé dans les écrits et déplaît à beaucoup de candidats. Lorsqu'il n'a pas été simplement sauté, il a posé des problèmes dès les premiers calculs pourtant très simples.

Le premier problème était un sujet d'analyse composé de trois parties indépendantes portant sur l'étude d'une famille de séries entières dépendant d'un paramètre. Ce problème était l'occasion d'interroger les candidats sur les séries (numériques, de fonctions, entières), sur les intégrales généralisées et un peu plus brièvement sur les probabilités et les équations différentielles. Ce problème a mis en évidence un manque d'aisance autour des séries entières de certains candidats. Il est difficile d'avancer lorsque l'on ne connaît pas la forme du domaine de convergence d'une série entière. D'autres s'en sont bien sortis mais presqu'aucun candidat n'a perçu la subtilité autour du logarithme complexe.

Le second problème, d'algèbre linéaire, proposait de démontrer le caractère réel et positif du déterminant des matrices complexes du type $(I_n + C\bar{C})$. Il était constitué d'une première partie où étaient traités des cas particuliers simples, et d'une seconde partie comportant la preuve dans le cas général. Une bonne partie du problème a été abordée par les candidats avec plus ou moins de succès. La fin du problème était difficile et une poignée de candidats ont pu se démarquer en répondant à une partie de ces questions.

3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

Exercice

Q1. Le caractère C^1 de la fonction pour justifier l'étude des points critiques est très peu mentionné. Beaucoup de candidats se trompent dans le calcul des dérivées partielles et seulement une minorité est capable d'aller jusqu'au bout.

Q2. La notion d'« arbitrairement proche de 0 » est souvent mal comprise. Dans de nombreuses copies, un seul point « proche » de 0 est choisi.

Q3. Le calcul est en général correct. Certains candidats reprennent intégralement le calcul pour la seconde expression.

Q4. La minoration proposée par l'énoncé n'est pas optimale et peu de candidats y parviennent.

Q5. Assez mal comprise par la majorité de ceux qui l'ont abordée.

Problème 1

Q6. Dans la plupart des copies, la méthode de d'Alembert est appliquée correctement. Attention cependant aux conclusions du type « la série converge si et seulement si $|x| \leq 1$ » sans avoir déterminé le comportement de la série au bord de l'intervalle de convergence.

Q7. Réussie par une minorité de candidats. Beaucoup déterminent correctement le rayon de convergence à la question précédente mais certains le recalculent pour cette question et d'autres donnent ensuite des ensembles de définition fantaisistes comme $[0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbb{R}$... Cela montre que, pour ces candidats, la notion de rayon de convergence n'est pas comprise. Cette mauvaise compréhension a ensuite des répercussions à la question Q10.

Q8. Le théorème des séries alternées est correctement appliqué par une moitié des candidats.

Q9. Les formules classiques sont connues dans l'ensemble, bien que certains se contentent d'écrire la somme sans chercher à la calculer. Le cas $x = -1$ pour f_1 n'a été traité dans aucune copie.

Q10. Beaucoup se contentent de justifier par la continuité de la somme d'une série entière sur son intervalle **ouvert** de convergence.

Q11. La comparaison est effectuée la plupart du temps sans se soucier du signe de x. La limite de f_1 en $+\infty$ est souvent mal justifiée.

Q12. L'expression de λ est fréquemment correctement obtenue, alors que la condition $\alpha > 1$ est oubliée.

Q13. Comme à la question précédente, le calcul est correctement mené, mais la condition $\alpha > 2$ n'est vue que rarement.

Q14. La plupart des candidats répondent correctement à cette question de cours. L'erreur la plus fréquente est l'oubli du $(-1)^n$.

Q15. Certains reconnaissent le développement en série entière du logarithme, d'autres appliquent la méthode de d'Alembert.

Q16. Beaucoup de candidats n'ont pas vu que la variable est t, et pensent que le rayon de convergence est à nouveau 1. D'autres oublient de traiter le cas $z_0 = 0$ et donnent comme rayon de convergence le complexe $\frac{1}{z_0}$.

Q17. Pour la preuve du caractère C^∞, certains le justifient rapidement car g est somme d'une série entière (justification fréquente, même parmi les copies affirmant que le rayon de convergence est 1). D'autres appliquent le théorème de dérivation terme à terme.

Q18. Seulement une poignée de copies font mention du fait qu'une fonction à valeurs complexes est en jeu. Dans les autres cas, la justification donnée, lorsqu'il y en a une, est la dérivation de fonctions composées.

Q19. Cette question est mal comprise. Cela montre que l'objectif de définir un logarithme complexe dans cette partie du sujet n'a pas été compris. Dans une grande majorité des copies, on trouve « $A\exp(\ln(1+t\,z_0))$ », puis « on prend $A=1$».

Q20. La continuité de l'intégrande est souvent omise. Le reste est bien traité par les candidats rigoureux.

Q21. Certains tentent sans succès une intégration par parties. Une petite proportion de candidats pensent au bon changement de variable.

Q22. Cette question d'étude de fonction est facile et bien traitée par une majorité des candidats. Notons tout de même qu'une partie significative des candidats se trompent dans le calcul de la dérivée.

Q23. Souvent traitée correctement mais justifiée trop rapidement.

Q24. Question peu abordée mais réussie par une poignée de candidats.

Problème 2

Q25. Question abordable souvent réussie. Il convient de noter qu'un bon nombre de candidats semblent redécouvrir, en passant par les parties réelles et imaginaires, que le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un réel positif.

Q26. Le théorème spectral est cité et appliqué correctement dans une moitié des copies. Pour les autres, il est souvent fait référence à la question précédente sans justification supplémentaire.

Q27. La récurrence est souvent bien débutée. Une moitié des copies environ mentionnent le développement par rapport à une ligne ou une colonne. Parmi les erreurs fréquentes, on note les formules de développement fausses avec l'oubli de l'alternance des signes ou du coefficient de la matrice.

Q28. Question plutôt bien traitée. L'égalité $(C-iI_n)(C+iI_n)=C^2+I_n$ est la plupart du temps affirmée sans mentionner la commutativité de I_n et de C.

Q29. Le produit matriciel par blocs est correctement effectué. La rédaction de l'égalité des déterminants est par contre souvent imprécise et ne permet pas de décider si le candidat maîtrise le calcul des déterminants par blocs.

Q30. Question facile très majoritairement réussie.

Q31. Si certains sont attentifs à la nature des objets qu'ils manipulent, d'autres semblent penser qu'ils travaillent encore dans $\mathbb{C}^2$ et prennent une « base » (E_1,E_2) mal définie avant de la transformer en une base (E_2,E_1).

Q32. Rarement bien résolue, les quelques tentatives d'appliquer la question précédente sont en général maladroites.

Q33. Les candidats ont bien identifié que la question était abordable avec des points rapidement gagnés.

Q34. Beaucoup commencent à prouver la liberté de la famille avant d'abandonner ou de conclure trop rapidement. C'est finalement la stabilité du plan qui a été le mieux traitée.

Q35 à **Q38**. Ces questions étaient plus difficiles que le reste du sujet. Elles ont été très peu abordées. La plupart des candidats qui abordent Q36 se méprennent dans la définition de F_λ. Quelques candidats ont pu se démarquer en proposant des idées intéressantes mais aucun n'a pu les traiter en intégralité.