Exercices - Concours Commun INP - Filière PSI - Corrigé (très) partiel : corrigé

Avertissement : Ceci n'est pas une correction *in extenso* de l'épreuve. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Problème 1 - Partie I

Q1 Calculons, pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, le module de $|e^{-t(1-itx)}|$. On a

$$|e^{-t(1-itx)}| = e^{-t}|e^{it^2x}| = e^{-t}.$$

Or, la fonction e^{-t} est intégrable sur $[0,+\infty[$ (par exemple, car on peut calculer effectivement $\int_0^X e^{-t}dt$ et déterminer sa limite lorsque X tend vers $+\infty$, ou alors parce que $t^2e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$). Il en est de même de la fonction $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$, et donc f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q2 La fonction $t \mapsto t^pe^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, on a $\lim_{t\to+\infty} t^2 \times t^pe^{-t} = 0$. Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale définissant Γ_p est convergente. Pour exprimer Γ_{p+1} en fonction de Γ_p, on réalise une intégration par parties, en dérivant t^{p+1} et en intégrant e^{-t}. Puisque toutes les fonctions mises en jeu sont intégrables sur $[0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma_{p+1} &= \lim_{t\to+\infty} -t^{p+1}e^{-t} - 0 + (p+1)\int_0^{+\infty} t^pe^{-t}dt\\ &= (p+1)\Gamma_p.\end{aligned}$$

Q3 Puisque $\Gamma_0 = 1$, on démontre ensuite par une récurrence laissée au lecteur que $\Gamma_p = p!$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Q4 On va appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral. La fonction $(t,x) \mapsto t^pe^{-t(1-itx)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, en remarquant que $f(t,x) = e^{-t}e^{it^2x}$, il est facile de voir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x) = (it^2)^k e^{-t}e^{it^2x} = i^kt^{2k}e^{-t}e^{it^2x}.$$

On remarque alors que, pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leq t^{2k}e^{-t}.$$

La fonction de droite ne dépend plus de x et est intégrable sur $[0,+\infty[$ (cf la question précédente). Donc, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (it^2)^pe^{-t}e^{it^2x} = dt.$$

Q5 En particulier, on a

$$|f^{(p)}(0)| = \int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t}dt = \Gamma_{2p} = (2p)!.$$

Mais,

$$\frac{|f^{(p)}(0)|}{|f^{(p+1)}(0)|} = (2p+1)(2p) \xrightarrow{p\to+\infty} +\infty.$$

La série entière $\sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ a pour rayon de convergence 0. Ainsi, la fonction f ne peut pas être développable en série entière en 0. Sinon, il existerait un intervalle ouvert I centré en 0 tel que, pour tout $x \in I$, on aurait

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p,$$

et le rayon de convergence de cette dernière série entière serait strictement positif.