Exercices - Concours Commun INP - Filière PC - Corrigé (très) partiel : corrigé

Avertissement : Ceci n'est pas une correction *in extenso* de l'épreuve. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Exercice 3

Q28 L'énoncé nous dit que $p_0 = 1$ tandis que $q_0 = r_0 = 1$. Après une étape, on a $p_1 = 1/2$, $q_1 = 1/4$ et $r_1 = 1/4$.

Q29 Les événements $A_n,\ B_n,\ C_n$ constituent un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ &= \frac{1}{4}\left(2p_n + q_n + r_n\right). \end{aligned}$$

Avec la même méthode, on démontre que

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(p_n + 2q_n + r_n\right) \\ r_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(p_n + q_n + 2r_n\right). \end{aligned}$$

Ceci signifie exactement que $V_{n+1} = MV_n$.

Q30 La formule $V_n = M^n V_0$ se démontre par récurrence (immédiate ?). Puisque M^n est donné par l'énoncé, tenant compte de V_0 calculé à la première question, on a

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n} \\ q_n &= \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} \\ r_n &= \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}. \end{aligned}$$

Q31 On a $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = 1/3$. L'état stable de la marche aléatoire est l'état où les probabilités d'être sur chacun des sommets sont égales.

Q32 La variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ compte le nombre de fois où le pion passe en A entre l'étape 1 et l'étape n. $E(X_1 + \cdots + X_n)$ représente donc le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n, donc $E(X_1 + \cdots + X_n) = a_n$.

Q33-Q34 On a $E(X_i) = 1 \times P(A_i) + 0 \times P(\bar{A}_i) = p_i$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4^i + 2}{3 \cdot 4^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right). \end{aligned}$$

Q35 $T_B = 1$ est aussi l'événement B_1. On a donc $P(T_B = 1) = 1/4$. L'événement $T_B = 2$ correspond à $(A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)$. L'union est disjointe, et donc $P(T_B = 2) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)$. Mais,

$$P(A_1 \cap B_2) = P_{A_1}(B_2) P(A_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

et

$$P(C_1 \cap B_2) = P_{C_1}(B_2) P(C_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Finalement, $P(T_B = 2) = \frac{3}{16}$ (les calculs effectués ci-dessus sont sans doute plus clairs en dessinant un arbre de probabilité).

Q36 $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$.

Q37 Pour établir le premier résultat, le mieux est encore de faire l'arbre de probabilités correspondant pour trouver toutes les probabilités demandées. Le second résultat vient de la définition de la probabilité conditionnelle.

Q38 L'événement $T_B = k$ s'écrit encore $B_k \cap \overline{B_{k-1}} \cap \cdots \cap \overline{B_1}$. On calcule cette dernière probabilité à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(T_B = k) = P(B_k | \overline{B_{k-1}} \cap \cdots \cap \overline{B_1}) \times P(\overline{B_{k-1}} | \overline{B_{k-2}} \cap \cdots \cap \overline{B_1}) \times \cdots P(\overline{B_1}).$$

D'après la formule admise par l'énoncé, et puisque

$$P(\overline{B_{n+1}} | \overline{B_n} \cap \cdots \cap \overline{B_1}) = 1 - P(B_{n+1} | \overline{B_n} \cap \cdots \cap \overline{B_1})$$

on en déduit que

$$P(T_B = k) = \frac{1}{4} \times \frac{3^{k-1}}{4^{k-1}} = \frac{3^{k-1}}{4^k}.$$

1. On a $\sum_{k=0}^{+\infty} P(T_B = k) = 1$. Mais on vérifie que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) = 1$, et donc $P(T_B = 0) = 0$.
2. Espérance d'une loi géométrique....