MP

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 1

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

THÈME

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème, tous les trois indépendants.
Dans le premier exercice, on prouve l'intégrabilité d'une fonction, puis on calcule son intégrale en intégrant une série de fonctions.
Dans le deuxième exercice, on détermine le minimum d'une fonction à deux variables après avoir établi une inégalité de convexité.
Le problème intitulé « un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann » comporte trois parties :

- la partie I est de l'algorithmique au programme de « l' informatique pour tous » ; on programme en Langage Python les nombres de Bernoulli qui permettent d'obtenir les valeurs exactes de la fonction zêta aux entiers pairs ;
- la partie II établit des généralités sur la fonction zêta : mode de convergence, monotonie, limite à l'infini et une expression de zêta au carré sous forme d'une série de Dirichlet ;
- dans la partie III, on démontre par des techniques probabilistes la formule du produit Eulérien pour la fonction zêta, puis en application, on prouve la divergence de la série des inverses des nombres premiers.

Les notions abordées sont assez variées :

- intégration : intégrabilité d'une fonction, comparaison série/intégrale ;
- séries de fonctions : différents modes de convergence, dérivabilité, intégration terme à terme ;
- séries numériques, théorème de sommation par paquets ;
- probabilités : variables aléatoires indépendantes, propriété de limite monotone pour une probabilité ;
- arithmétique : entiers deux à deux premiers entre eux, théorème de Gauss ;
- algorithmique avec Python : fonction factorielle, coefficients binomiaux par récursivité, estimation du nombre d'opérations, puis programmation des nombres de Bernoulli.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES

Le texte de l'épreuve était clair, de difficulté et de longueur raisonnables. Plusieurs candidats ont traité toutes les questions et obtenu la note maximale.

Les thèmes traités étaient assez classiques et variés, même si la partie probabilités demandait un peu de recul sur les notions. Les questions « d'informatique pour tous » ont, dans l'ensemble, été bien traitées mis à part la programmation des nombres de Bernoulli, plus délicate.

La moyenne de l'épreuve est de 10,34 avec un écart-type de 4,39. Ce sujet a donc rempli son rôle de sélection des candidats.

On regrette toutefois trop de copies mal rédigées ou mal écrites. Elles sont parfois difficiles à déchiffrer pour le correcteur, ce qui pénalise bien sûr le candidat. On rappelle aux futurs candidats qu'il faut mettre en évidence les résultats : <u>souligner</u> ou encadrer les résultats rend la copie bien plus lisible.

3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

EXERCICE I

Q1. Le calcul est en général réussi, mais de nombreuses copies ne justifient pas correctement l'existence de l'intégrale, en particulier la continuité n'est parfois pas mentionnée.

Q2. Même difficulté pour l'intégrabilité où l'étude au voisinage de 1 est régulièrement oubliée. Le calcul est souvent bien effectué, mais sa justification par le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions n'est pas toujours bien réussie.

EXERCICE II

Q3. La concavité est généralement bien faite, mais l'inégalité de Jensen n'est pas toujours bien utilisée.

Q4. Le point critique est en général trouvé mais pour prouver qu'il s'agissait d'un minimum, il fallait utiliser l'inégalité de convexité de la question précédente. Le lien n'a pas toujours été vu.

PROBLÈME

Partie I

Q5. Très souvent réussie.

Q6. Quelques étudiants ne voient pas comment diminuer le nombre de multiplications. Le type float n'est pas toujours cité.

Q7. Pour cette fonction récursive, le cas de base est parfois oublié. Il fallait aussi être vigilant sur la division entière parfois mal placée dans la formule de propagation.

Q8. Question plus délicate, assez peu réussie. Le nombre de Bernoulli b_{n+1} d'indice dépendant de $b_0, \dots, b_n$, il fallait mémoriser les nombres de Bernoulli précédents et donc utiliser un tableau.

Partie II

Q9. Souvent bien faite. Des erreurs régulières cependant concernant les relations de négligeabilité et d'équivalence.

Q10. Question classique en général réussie où l'on établit le caractère dérivable de la fonction zêta.

Q11. Beaucoup de confusions ici. La convergence uniforme sur tout segment de $]0, +\infty[$ n'entraîne pas la convergence uniforme sur l'ouvert $]0, +\infty[$.

Q12. Le principe du théorème de la double limite est généralement compris, mais souvent la convergence uniforme est mal justifiée, ou alors le cas particulier n=1 est oublié, ce qui aboutit à une limite nulle pour la fonction zêta.

Q13. La double inégalité par comparaison série/intégrale est généralement établie mais parfois l'argument de monotonie n'est pas cité. L'équivalent n'est pas toujours bien justifié.

Q14. Il fallait utiliser une sommation par paquets. Le terme partition n'est pas toujours utilisé et la justification de la sommabilité pas toujours claire.

Partie III

Q15. En général bien traitée, même si parfois on oublie de préciser que la réunion était disjointe (ou que les événements sont deux à deux incompatibles).

Q16. Question d'arithmétique où l'on devait établir une équivalence. Le sens facile est parfois oublié. L'énoncé imposait une récurrence. Cette question demandait de la rigueur et a été peu réussie. Le théorème de Gauss est souvent cité, mais mal utilisé. Assez peu de copies proposent un contre-exemple pour la deuxième partie de la question.

Q17. Relativement bien traitée par les candidats. Toutefois, un nombre important ne s'intéresse pas à une sous-famille quelconque.

Q18. Question souvent réussie par les candidats ayant compris le fil conducteur de cette partie.

Q19. Même remarque que la question précédente.

Q20. Régulièrement bien faite dans les meilleures copies, mais de manière très approximative sur les copies plus faibles.

4/ CONCLUSION

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.