# CAPES 2024 Deuxième épreuve

Proposition de corrigé par Frédéric LAURENT

---

### Concevoir des situations d'enseignement

1. Question 1

   La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition nécessite de multiplier $-7$ par $x$ ainsi que $-7$ par $-3$ et d'en faire la somme.

   La réponse A est le premier distracteur. Il a été construit de la façon suivante : le premier produit est effectué correctement, mais une somme est ensuite effectué à la place du produit. En effet, la différence qui précède le 3 dans les parenthèses induit ce changement d'opération.

   La réponse B est le second distracteur. Ce distracteur peut mettre en évidence une erreur de signe dans le produit de deux nombres négatifs : le produit de $-7$ par $-3$ est égal à $-21$. Il peut également avoir été choisi car la formule de distributivité $k(a-b) = ka - kb$ conduit à transformer un produit en une différence. Certains élèves attendent donc nécessairement "le signe $-$" dans la réponse, sans se rendre compte que le signe de $k$ peut conduire à utiliser le signe $+$.

   Question 2

   La réponse A correspond au premier distracteur. Ce distracteur a été construit avec un facteur commun possible, à savoir $2x$, et donc un produit de la forme $2x(a-b)$. Le choix du facteur $2x$ peut provenir de l'interprétation fautive de $2x^2$ comme $(2x)^2 = 2x \times 2x$. Quant au terme $b$ il prend simplement en considération le fait qu'il faut "enlever" $x$ au terme $10x$ initial. En ce sens, on teste si l'élève a compris la notion de facteur commun puisque $10x$ doit être vu comme un produit : $2x \times 5$.

   La réponse B correspond au second distracteur. Ce distracteur a été construit avec un autre facteur commun possible, à savoir $x$, et donc un produit de la forme $2x(a-b)$. Le terme $b = 10$ est correct mais le terme $a = 2x^2$ ne tient pas compte de la factorisation par $x$. En ce sens, on teste si l'élève a compris de la notion de facteur commun puisque $2x^2$ doit être vu comme un produit : $x \times 2x$.

   Question 3

   La réponse B correspond au premier distracteur. Ce distracteur a été construit de sorte que l'expression proposée $(4x+1)(5x-6) + x^2$ soit une somme, mais que le premier terme de cette somme soit lui-même un produit $(4x+1)(5x-6)$. Ce distracteur teste la compréhension de l'aspect structural de l'expression et particulièrement la capacité à repérer la dernière opération à effectuer dans l'ordre des priorités. L'identification du produit $(4x+1)(5x-6)$, écrit sous une forme prototypique, ne garantit pas que l'expression entière soit un produit.

   La réponse C correspond au second distracteur. Ce distracteur a été construit de telle sorte que l'expression proposée ressemble à la forme prototypique d'un produit de facteurs. Mais l'expression $(3x+5)-(x+9)$ est une somme. L'usage des parenthèses pour isoler chacun des termes de cette différence (les premières étant inutiles) peut conduire à la confusion avec un produit. Le distracteur joue davantage sur une reconnaissance visuelle d'une forme factorisée que sur l'étude précise des opérations en jeu dans l'expression et le repérage de la dernière opération à effectuer dans l'ordre des priorités opératoires.

Remarque: on notera que la réponse correcte A n'est pas prototypique (il n'y a pas deux couples de parenthèses) ce qui peut encourager les élèves à se tourner vers les deux distracteurs.

2. - Commutativité de la multiplication au cycle 3: dans un produit de deux facteurs, on peut changer l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.
     Exemple: $2 \times 3,5 = 7$ et $3,5 \times 2 = 7$. On trouve naturellement cette propriété dans les tables de multiplication $6 \times 7 = 7 \times 6 = 42$.
   - Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition au cycle 4: multiplier une somme de deux termes par un nombre, c'est multiplier chacun des termes par ce nombre et ajouter les produits obtenus.
     Algébriquement, pour tous nombres $k$, $a$ et $b$, on a: $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$.
     Exemple: $2 \times (3,5+4) = 2 \times 7,5 = 15$. En utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, $2 \times (3,5 + 4) = 2 \times 3,5 + 2 \times 4 = 7 + 8 = 15$.
     La règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition peut permettre des calculs astucieux (notamment en calcul mental) et peut s'utiliser dans les deux sens: $11 \times 23 = 10 \times 23 + 1 \times 23 = 230 + 23 = 253$ et $23 \times 8,5 + 23 \times 1,5 = 23 \times (8,5 + 1,5) = 23 \times 10 = 230$.
     Remarque : on trouve également cette propriété en géométrie pour calculer le périmètre d'un rectangle. Si $L$ et $\ell$ désignent respectivement la longueur et la largeur du rectangle, le périmètre est donné par: $2 \times L + 2 \times \ell$ ou $2 \times (L + \ell)$.

3. L'extrait du programme de mathématiques du cycle 4 encourage les enseignants à éviter de rendre le cours de mathématiques comme une suite d'application de recettes et de règles, mais à faire prendre conscience aux élèves de l'intérêt de ces règles, de leur justification. L'idée sous-jacente est que la règle prenne du sens.
   Sinon, le risque est de placer les élèves dans la même situation que le jeune Stendhal, pour qui la règle des signes apparaît incompréhensible, dénuée de sens. Il aimerait une explication pour comprendre pourquoi cette règle est valide, mais son professeur lui demande de l'admettre sans la questionner... comme un argument d'autorité.
   En l'occurrence, la règle des signes peut faire l'objet d'une justification. Comme le précise l'extrait du programme, une telle justification peut se faire "par l'exemple", c'est-à-dire à l'aide d'un exemple générique. Les explications peuvent rester modestes sans demander un haut niveau d'abstraction ("la démonstration doit se faire de manière progressive").

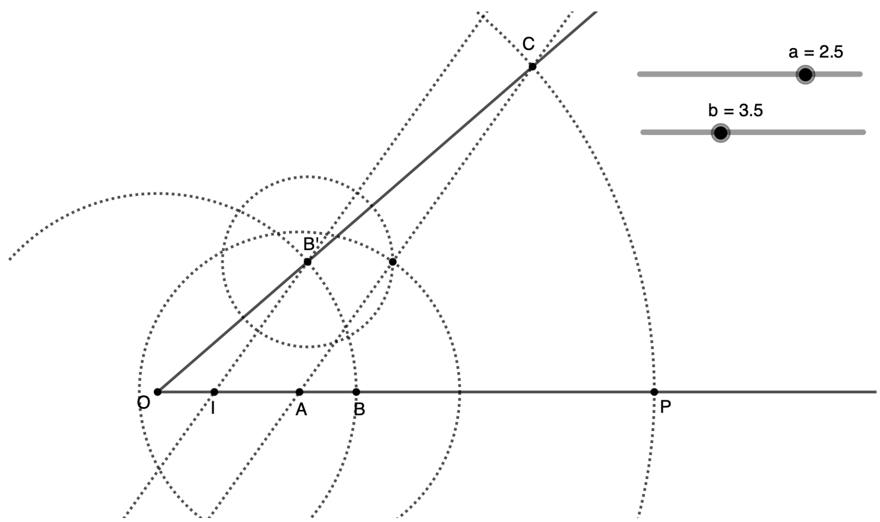
   Remarque : le programme évoque aussi "la formation de la personne et du citoyen". Chaque individu doit être capable de se questionner sur les choses et sur sa compréhension du monde. Ainsi les attitudes réflexives d'élèves comme celle du jeune Stendhal sont à valoriser.

4. D'une part : $-2 \times (-5 + 5) = -2 \times 0 = 0$. D'autre part, à l'aide de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, $-2 \times (-5 + 5) = -2 \times -5 + (-2) \times 5$. On sait par

ailleurs que $(-2)\times 5 = -10$ (car il s'agit de $5\times(-2) = (-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)$). Donc $-2\times(-5+5) = -2\times(-5)+(-10)$. Comme les deux calculs doivent fournir le même résultat, on en déduit que $-2\times(-5)+(-10) = 0$ ce qui signifie que les termes de cette somme, à savoir $-2\times(-5)$ et $-10$ sont opposés (puisque leur somme vaut zéro). Donc nécessairement $-2\times(-5)$ doit valoir 10. Cela justifie le signe du produit de $-2$ par $-5$.

5. (a) L'élément du programme de collège qui permet de justifier la construction de Descartes est le théorème de Thalès (dans sa configuration des triangles emboîtés étudiée en classe de $4^{\text{ème}}$). En effet, les points $A$ et $C$ appartiennent respectivement aux demi-droites $[BD)$ et $[BE)$ et les droites $(AC)$ et $(DE)$ sont parallèles.
   On peut évidemment utiliser les triangles semblables qui constituent un équivalent du théorème de Thalès.

   (b) Notons $O$ le point de la ligne numérique d'abscisse 0, $I$ le point d'abscisse 1, $A$ celui d'abscisse $a$ et $B$ celui d'abscisse $b$. Voici un programme de construction du produit $ab$ à la façon de Descartes:
   - Tracer une demi-droite d'origine $O$ (ne formant ni un angle nul ni un angle plat avec la demi-droite $[OI)$).
   - Placer sur cette demi-droite le point $B'$ tel que $OB' = OB = b$.
   - Tracer la droite parallèle à la droite $(IB)$ passant par $A$, cette droite coupe la demi-droite $[OB')$ en un point $C$.
   - Placer le point $P$ de la demi-droite $[OI)$ tel que $OC = OP$. Le point $P$ a pour abscisse le produit $ab$.




   (c) Le premier élément du programme qui pourrait inciter un professeur à proposer cette activité en classe de seconde est le fait de pouvoir réactiver les connaissances du collège (ici le théorème de Thalès) à travers un problème (celui consistant à construire géométriquement, à la règle et au compas, un segment de longueur le produit de deux longueurs données).

   Le second élément est que l'histoire des mathématiques peut servir de ressource pour trouver de tels problèmes. Le programme écrit "l'histoire peut [aussi] être envisagée comme une source féconde de problèmes". Le document officiel propose aussi à l'enseignant de "s'appuyer sur l'étude de documents historiques", comme celui de Descartes, soulignant le caractère véridique des problèmes rencontrés et résolus dans le passé. On y voit, au passage, que les notations de géométrie ont évolué.

Le troisième élément possible est le fait que ce document montre une interaction entre le numérique, l'algébrique et le géométrique. Or les programmes invitent à établir des liens entre les divers domaines des mathématiques ("il est essentiel d'exploiter les possibilités d'interaction entre ces parties"). Dans ce cadre, l'évocation de Descartes est pertinente puisqu'on lui doit la méthode consistant à résoudre les problèmes de géométrie grâce à l'algèbre (le problème de l'annexe 10 en constitue un exemple prototypique).

**Approfondir une procédure automatisée**

6. (a) Il est possible d'amener l'élève à comprendre son erreur en lui faisant poser la multiplication de deux nombres entiers à trois chiffres. Il pourra alors voir que neuf multiplications lui auront été nécessaires et donc qu'il ne s'agit pas du double du nombre de chiffres de l'écriture décimale du nombre entier mais de son carré.

   (b) Un coup de pouce possible consiste à dire à l'élève qu'il a correctement traduit les trois premières étapes de l'algorithme de Karatsuba et qu'il doit poursuivre avec les deux étapes suivantes afin d'exprimer le résultat final en fonction de $d$, $u$, $e$ et $v$. Il lui restera à comparer ce résultat avec le produit obtenu par la méthode "de l'école" (ce qui peut nécessiter du calcul littéral).

   Remarque : l'élève s'est arrêté au bout des trois premières étapes car ce sont elles qui contiennent les multiplications et qui lui permettent de compter le nombre de multiplications nécessaires dans l'algorithme de Karatsuba. Cela traduit peut être une incompréhension de la consigne : "démontrer qu'elle fonctionne" a peut être été interprété comme "démontrer qu'elle nécessite moins de multiplications que la méthode qu'on apprend à l'école".

7. Une correction possible de la question b) pour une classe de seconde:
   Notons $d$ le chiffre des dizaines du premier nombre et $u$ son chiffre des unités. Ainsi le premier nombre s'écrit $10d + u$. Notons $e$ le chiffre des dizaines du second nombre et $v$ son chiffre des unités. Ainsi le second nombre s'écrit $10e + v$. Le produit qui est à calculer est donc $(10d + u)(10e + v)$.
   La méthode que l'on apprend à l'école consiste à effectuer quatre produits et à les ajouter (on peut accompagner cette remarque par la disposition pratique du produit). Notre algorithme est en fait une simple application de la règle de "double distributivité", ainsi: $(10d + u)(10e + v) = 100de + 10dv + 10eu + uv = 100de + 10(dv + eu) + uv$.
   La méthode de Karatsuba consiste à :

   - calculer les produits des chiffres de même ordre entre eux : $de$ et $uv$
   - effectuer les sommes des chiffres de chacun des nombres : $d + u$ et $e + v$
   - effectuer le produit des sommes obtenues : $(d + u)(e + v)$ ce qui revient à $de+dv+ue+uv$

- soustraire les deux produits obtenus à l'étape 1 donc $(d+u)(e+v) - de - uv$, ce qui revient à $de + dv + ue + uv - de - uv = dv + ue$
- sommer le centuple de premier produit, le décuple du résultat précédent et le second produit, donc $100 \times de + 10 \times (dv + eu) + uv$.

Ce dernier résultat correspond bien au produit attendu ce qui assure la validité de la méthode de Karatsuba pour le produit de deux nombres entiers à deux chiffres. En particulier, on conclut que la méthode de Karatsuba nécessite trois multiplications intermédiaires alors que la méthode usuelle apprise à l'école en nécessite quatre (c'est la "double distributivité").

8. La première intention du programme qui peut guider le choix de cette situation est de "permettre à chaque élève de consolider les acquis du collège et une culture mathématique de base" ou encore "assurer les bases mathématiques nécessaires à toutes les poursuites d'études au lycée". En effet, ici c'est la capacité à réinvestir l'écriture d'un nombre entier naturel dans le système décimal qui est en jeu et l'utilisation du calcul littéral (traduction d'un programme de calcul, utiliser la double distributivité).
   La seconde intention en jeu est de "faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques ainsi que de la simplification et de la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction" mais aussi l'expérience "des démarches et des objets mathématiques". La situation permet de montrer comment un problème mathématique très général peut être posé et résolu, montrant ainsi les démarches mathématiques sous-jacentes de recherche et de preuve, en montrant l'intérêt du calcul littéral comme un outil démonstratif permettant la généralisation.

9. Une application des mathématiques qui nécessite de calculer le produit de très grands nombres entiers est le codage RSA en cryptographie qui est basé sur la factorisation d'un très grand nombre entier par des nombres premiers.

**Rectifier des représentations**

10. Chacun des trois élèves a ajouté 4 cm à chacune des dimensions de la pièce rectangulaire qu'il avait à agrandir. Pour ces trois élèves, un agrandissement consiste à faire augmenter la longueur de tous les segments en ajoutant une même constante.

11. En donnant à chaque groupe de trois élèves les pièces rectangulaires à agrandir cela permet d'abord, en cas d'erreur, comme dans le cas de la production de l'annexe 9, de ménager une phase de validation aux élèves. En assemblant leurs trois pièces ils se verront dans l'incapacité de reconstituer un carré agrandi par rapport au carré initial. Cela permet de réaliser certaines conceptions erronées de la notion d'agrandissement. Cet intérêt est d'ordre didactique (il permet une phase de validation dans une situation d'action).
    Au niveau pédagogique, le travail de groupe est particulièrement intéressant pour diverses raisons (en citer une parmi les suivantes) :

    - Il permet le débat lors des phases de travail communes (cf. argument précédent) et l'entraide.
    - De façon générale, il favorise la communication entre les élèves.
    - Il permet à l'enseignant de répartir les pièces en fonction des élèves au sein du groupe et d'adapter en fonction d'éventuelles difficultés.

- Il permet de gagner du temps car un seul et même élève n'a pas en charge la construction des trois pièces.

12. Dans la situation du puzzle, plusieurs variables didactiques peuvent être dégagées. Parmi elles, les dimensions des pièces de la figure de départ, la forme de ces pièces, les contraintes de l'agrandissement. Dans la situation de l'annexe 8, toutes les dimensions choisies sont des multiples de 2 cm, toutes les pièces sont rectangulaires et l'agrandissement doit tripler les longueurs. On peut donc agir sur l'une de ces variables pour prolonger la situation.
Par exemple, il est possible de partir d'un puzzle similaire où les pièces auraient pour dimensions : 7 cm par 2 cm, 5 cm par 2 cm et 5 cm par 5 cm, et de demander d'agrandir les pièces de sorte que les segments mesurant 5 cm mesurent finalement 7 cm. Ce changement permet d'aller vers des procédures plus élaborées de proportionnalité, notamment l'usage d'un coefficient de proportionnalité (qui est un attendu de la classe de 6$^{\text{ème}}$). En effet, dans la version initiale les raisonnements basés sur l'aspect additif de la linéarité étaient possibles puisque toutes dimensions étaient multiples de 2 cm (ainsi 4 cm = 2 cm + 2 cm pouvait être agrandi en 6 cm + 6 cm soit 12 cm).

**Analyser des productions d'élèves**

13. Cet exercice est plutôt un problème qui nécessite la prise d'initiatives. On peut le qualifier de problème ouvert ou de problème "pour chercher".

14. Analyse des productions d'élèves :

Exemple de correction possible (non demandée mais utile pour analyser les productions d'élèves) :
**Conjecture**
À l'aide du logiciel GeoGebra, en déplaçant le point $M$ sur le segment $[AB]$, nous avons pu conjecturer que le problème possède une solution lorsque $AM \approx 5,9$.

**Démonstration**
Notons $x$ la longueur $AM$.Compte tenu des contraintes du problème, vu que le point $M$ appartient au segment $[AB]$, nécessairement $x \in [0\ ;\ 10]$. L'aire du carré $AMPQ$ est donc donnée par $x^2$. La longueur $MB$ est égale à $10 - x$ donc l'aire du carré $MBRS$ est donnée par $(10 - x)^2$. Le problème se traduit alors par l'équation $x^2 = 2\,(10 - x)^2$ qu'il faut résoudre dans $[0\ ;\ 10]$.

Une première méthode consiste à travailler sur l'égalité de deux carrés : $x^2 = 2\,(10-x)^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{2}\,(10-x)\right)^2$. Or les carrés de deux nombres réels sont égaux si et seulement si ces nombres sont égaux ou opposés. Donc $x^2 = 2\,(10-x)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\,(10-x)$ ou $x = -\sqrt{2}\,(10-x) \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2} - x\sqrt{2}$ ou $x = -10\sqrt{2} + x\sqrt{2} \Leftrightarrow x + x\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ ou $x - x\sqrt{2} = -10\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)x = 10\sqrt{2}$ ou $\left(1-\sqrt{2}\right)x = -10\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{10\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ ou $x = \dfrac{-10\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.
La première solution est environ égale à 5,9 (ce qui confirme notre conjecture) tandis que la seconde est environ égale à 34,1. Comme $x \in [0\ ;\ 10]$, seule la première solution doit être retenue. Donc l'aire du carré $AMPQ$ est le double de l'aire du carré $MBRS$ lorsque

| | réussites | erreurs |
|---|---|---|
| élève 1 | L'élève produit un partage cohérent du segment $[AB]$ par rapport à la solution qu'il propose. | L'élève appuie son raisonnement sur une propriété erronée consistant à penser que l'aire d'un carré est proportionnelle à la longueur de son côté. |
| élève 2 | L'élève sait mettre le problème en équation en posant $x$ la longueur $AM$ (mais sans le préciser). L'équation qu'il obtient est correcte. Il résout l'équation en écrivant des équations équivalentes et isole $x^2$. Il trouve $x$ en prenant la racine carrée et en justifiant qu'une longueur est positive. Sa démarche serait correcte s'il n'y avait pas d'erreur de calcul algébrique (voir ci-contre). | Il n'indique pas l'inconnue qu'il choisit pour mettre le problème en équation. Il commet une erreur dans l'utilisation de l'identité remarquable $(a-b)^2$ qu'il développe en $a^2 - b^2$. |
| élève 3 | Il rédige la mise en équation du problème en nommant son inconnue et en expliquant comment il obtient l'équation. Cette dernière traduit correctement le problème. Il résout l'équation en écrivant des équations équivalentes. Sa démarche de transformer l'équation du second degré en une équation de la forme "produit nul" est tout à fait judicieuse. Sa démarche serait correcte s'il n'y avait pas d'erreur de calcul algébrique (voir ci-contre). Il trouve deux solutions pour son équation mais exerce un regard critique sur les valeurs numériques obtenues. Il tient compte du fait que $10 - c$ représente une mesure de longueur, donc un nombre positif, pour éliminer la solution $c = 20$. | Sa seule erreur réside dans la factorisation de $a^2 - 2b^2$. Pour cela, il utilise l'identité remarquable permettant la factorisation d'une différence de deux carrés sans transformer le terme $2b^2$ en un carré, à savoir $\left(\sqrt{2}b\right)^2$. |

$x = \dfrac{10\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Remarque : on a l'habitude de "supprimer" les radicaux au dénominateurs en effectuant les transformations suivantes: $x = \dfrac{10\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{10\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{10\sqrt{2}-20}{1-2} = 20 - 10\sqrt{2}$.

Une autre méthode possible est de transformer l'équation en une équation de type "produit nul" grâce à une transposition et une factorisation : $x^2 = 2\,(10-x)^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{2}\,(10-x)\right)^2 \Leftrightarrow$
$x^2 - \left(\sqrt{2}\,(10-x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2}\,(10-x)\right)\left(x + \sqrt{2}\,(10-x)\right) = 0$
$\Leftrightarrow \left(x - 10\sqrt{2} + x\sqrt{2}\right)\left(x + 10\sqrt{2} - x\sqrt{2}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \left(\left(1+\sqrt{2}\right)x - 10\sqrt{2}\right)\left(\left(1-\sqrt{2}\right)x + 10\sqrt{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)x - 10\sqrt{2} = 0$ ou $\left(1-\sqrt{2}\right)x + 10\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{10\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ ou $x = \dfrac{-10\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$. On conclut alors de la même manière qu'avec la première méthode.

15. Pour cet élève, multiplier c'est augmenter. Cette conception peut s'expliquer par une conception trop limitée de la notion de nombre : l'élève pense essentiellement aux nombres entiers. Multiplier un nombre par un entier supérieur ou égal à 2 revient à une addition itérée de ce nombre, ce qui conduit à l'idée d'augmentation. On peut l'aider à percevoir son erreur de raisonnement en regardant l'effet d'une multiplication d'un nombre par un nombre (décimal ou rationnel) strictement compris entre 0 et 1 : par exemple, multiplier par 0,5 revient à diviser par 2.

16. Une première possibilité pour conjecturer la propriété est de recourir à un tableur. Une colonne pour les valeurs de $x$ que l'on démarre à 0 et que l'on étire avec un pas d'un dixième par exemple et une colonne pour les valeurs de $x^2$ correspondantes.
Une deuxième possibilité est de considérer les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ et de tracer leurs courbes représentatives dans un repère afin de comparer graphiquement les images d'un réel positifs.

17. **Conjecture**
Nous avons conjecturé la propriété suivante:

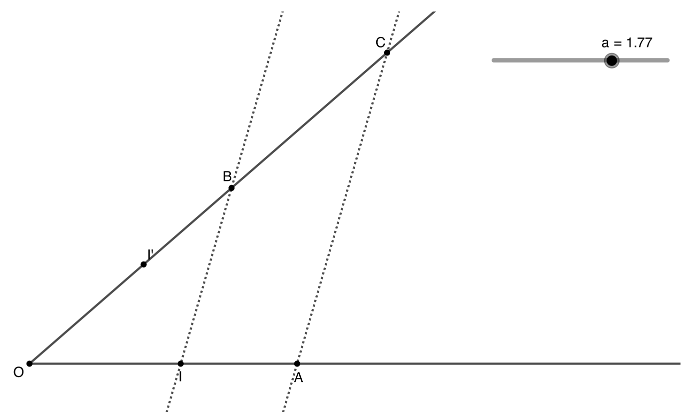
    - un nombre réel positif est strictement inférieur à son carré lorsque ce nombre est strictement supérieur à 1. Ce qui s'écrit : pour tout $x \in ]1\ ;\ +\infty[$, $x < x^2$.
    - un nombre réel positif est égal à son carré lorsque ce nombre est 0 ou 1.
    - réel positif est strictement supérieur à son carré lorsque ce nombre est strictement compris entre 0 et 1. Ce qui s'écrit : pour tout $x \in ]0\ ;\ 1[$, $x > x^2$.

    **Démonstration**
    Nous allons démontrer cette propriété de plusieurs manières différentes.

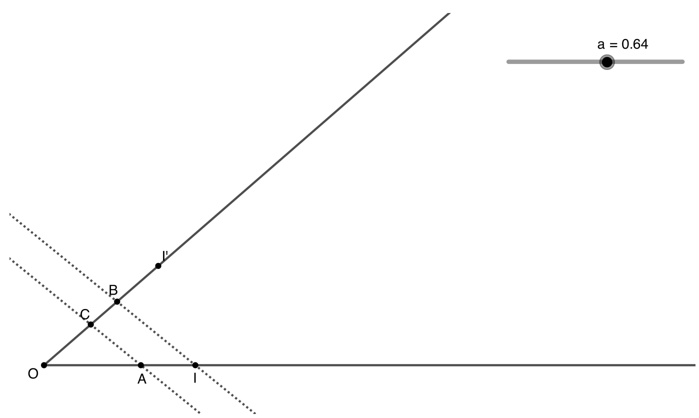
    - Première méthode : en utilisant les inégalités (méthode particulièrement adaptée suite à la conjecture émise)
    Soit $x$ un réel positif ou nul.
    Si $x = 0$ ou $x = 1$, il est clair que $x^2 = x$.
    Si $x > 1$, alors on peut multiplier chaque membre de cette inégalité par $x$ qui est strictement positif sans changer le sens de l'inégalité. On obtient ainsi $x \times x > x$ c'est-à-dire $x^2 > x$.
    Si $x < 1$, en procédant de la même façon, on obtient $x^2 < x$.
    Comme nous avons étudié toutes les possibilités, nous pouvons conclure que : pour tout réel $x$ strictement positif, $x^2 > x \Leftrightarrow x > 1$, $x^2 < x \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $x^2 = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
    - Deuxième méthode : en étudiant le signe de la différence (méthode plus générique et pratique lorsqu'on n'a pas conjecturé à l'avance le résultat)
    Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $x^2 - x = x\,(x-1)$.
    Ainsi le cas d'égalité est immédiat : $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\,(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
    Supposons maintenant $x \neq 0$ et $x \neq 1$. Comme $x > 0$, d'après la règle des signes, le

signe de $x\,(x-1)$ est le même que celui de $x-1$.
Cela signifie que $x^2 - x > 0$ si et seulement si $x-1>0$, donc si et seulement si $x>1$.
On en conclut que $x^2 > x$ si et seulement si $x>1$.
De même, $x^2 - x < 0$ si et seulement si $x-1<0$, donc si et seulement si $x<1$. Ce qui veut dire que $x^2 < x$ si et seulement si $0<x<1$.

- Troisième méthode : raisonner géométriquement à la façon de Descartes (cf. question 5 portant sur l'annexe 4).
On reprend la configuration de la question 5b; en particulier $OI = OI'$ est l'unité. On place le point $A$ tel que $OA = x = OB$. On trace la parallèle à la droite $(IB)$ passant par $A$. Avec la construction de Descartes, on obtient le point $C$ tel que $OC = x^2$.
Si $x>1$, les points $O, B, C$ sont alignés dans cet ordre donc $x^2 > x$ .




Si $x<1$, les points $O, C, B$ sont alignés dans cet ordre donc $x^2 < x$ .




Pour une vision plus complète de ce sujet, voir le chapitre 2 du livre "Vivre les mathématiques par des approches historiques", dir. F. Laurent, ADAPT, 2024.

18. Une première compétence mobilisée dans la dernière question de ce problème est la compétence "raisonner". Il faut en effet que l'élève établisse le lien avec la première question de l'exercice et identifie l'outil du cours qui, en utilisant les coordonnées des points de la figure, peut permettre d'établir l'orthogonalité de deux droites (ici le produit scalaire et son calcul à l'aide des coordonnées de vecteurs).
La seconde compétence mobilisées est la compétence communiquer. L'élève doit restituer à

l'écrit, en utilisant soigneusement les notations mathématiques, la mise en oeuvre de l'outil choisi et sa justification (le repère orthonormé légitime le calcul du produit scalaire par les coordonnées de vecteurs et la formule $xx' + yy'$).

19. L'enseignant souhaite manifestement mobiliser la compétence "chercher" puisque la solution n'est plus dans l'énoncé du problème comme précédemment ("on veut démontrer que les droites $(PQ)$ et $(BM)$ sont perpendiculaires..."). L'enseignant attend de l'élève qu'il s'engage dans une démarche, qu'il commence par émettre des conjectures en faisant différentes figures ou, mieux, en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.

    Remarque : par cette modification, l'enseignant mobilise également davantage la compétence "représenter" car aucune piste n'est suggérée par l'énoncé pour l'usage des coordonnées dans un repère orthonormé. C'est à l'élève de choisir un cadre de résolution (géométrie des configurations ou géométrie repérée).

20. Analyse des productions d'élèves :

| | réussites | erreurs |
|---|---|---|
| élève 1 | L'élève produit une figure dynamique avec GeoGebra et émet une conjecture. En particulier, il évalue l'angle entre les droites pour voir quand elles sont perpendiculaires. | La conjecture qu'il émet n'est ni précise ni complète. En effet, il évoque "la diagonale du carré" alors que le carré possède deux diagonales. Il aurait donc dû préciser la diagonale: d'après ses figures, il s'agit de la diagonale $(AC)$. Par ailleurs, si cette conjecture est correcte, elle n'est pas complète car cette diagonale n'est pas l'unique solution du problème. Enfin, l'élève semble considérer sa conjecture comme une démonstration. |
| élève 2 | L'élève prend l'initiative de se placer dans un repère (a priori, il s'agit du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ dont le caractère orthonormé n'est pas souligné et d'utiliser les coordonnées des points de la figure. Il algébrise la situation en nommant $(x; y)$ les coordonnées du point variable $M$. Il recourt au produit scalaire et connaît son expression avec les coordonnées i.e. la formule $xx' + yy'$). Il sait que deux droites sont perpendiculaires si le produit scalaire de deux vecteurs directeurs respectifs est nul. Il calcule convenablement les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BM}$. | Il ne précise pas le repère dans lequel il se place et ne signale pas que ce repère est orthonormé. Dans ce repère assez "naturel", les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ qu'il utilise sont erronées. Il a utilisé les coordonnées du vecteur opposé. Il raisonne d'abord par simple implication (là où il s'agit d'une équivalence) puis par équivalence: il n'y a pas de cohérence dans les liens logiques. La dernière équivalence n'est ni correcte ni expliquée. L'élève ne parvient pas à trouver l'ensemble des solutions du problème. De plus, il n'interprète pas l'élément de solution qu'il obtient, à savoir $x = y$, comme étant une droite ou une portion de droite. |

21. La conjecture s'inspire de la production de l'élève 1 tandis que la démonstration de celle de l'élève 2.

**Conjecture**
À l'aide du logiciel GeoGebra, nous avons conjecturé que les droites $(BM)$ et $(PQ)$ sont perpendiculaires lorsque le point M se situe sur la diagonale $[AC]$ ou sur la diagonale $[BD]$.
Une variante peut consister à - volontairement - conserver la conjecture de l'élève 1 et à montrer, à l'issue de la résolution algébrique du problème, que cette conjecture était incomplète. L'intérêt pédagogique de cette variante est de montrer l'efficacité d'une démonstration qui permet de trouver l'ensemble des solutions, alors qu'une phase de tâtonnement peut en laisser une partie de côté.

**Démonstration**
Nous allons prouver cela grâce à la caractérisation de l'orthogonalité de deux droites grâce au produit scalaire. Pour exprimer le produit scalaire, nous utiliserons les coordonnées de vecteurs dans un repère orthonormé.
Choisissons le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ . Notons $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point variable $M$ dans ce repère. Compte tenu de la construction de la figure, le point $P$ a pour coordonnées $(x\ ;\ 1)$ et le point $Q$ a pour coordonnées $(0\ ;\ y)$. Ainsi, dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{QP}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix}$.
Dans ces conditions, les droites $(BM)$ et $(PQ)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$, ce qui équivaut, en utilisant l'expression du produit scalaire dans un R.O.N., à $(x-1)\,x+y\,(1-y)=0$. Nous devons maintenant expliciter cette condition sur $x$ et $y$ :
$(x-1)\,x+y\,(1-y)=0 \Leftrightarrow x^2-x+y-y^2=0 \Leftrightarrow x^2-y^2+y-x=0 \Leftrightarrow (x+y)\,(x-y)+y-x=0 \Leftrightarrow (x-y)\,(x+y-1)=0 \Leftrightarrow x-y=0$ ou $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=x$ ou $y=1-x$. Cela signifie que les droites $(BM)$ et $(PQ)$ sont perpendiculaires si et seulement si $M$ appartient à la droite d'équation $y=x$, c'est-à-dire la première bissectrice ou la droite $(AC)$, ou à la droite d'équation $y=1-x$ qui est la droite $(DB)$. Comme le point $M$ est à l'intérieur du carré $ABCD$, cela revient à dire que les droites $(BM)$ et $(PQ)$ sont perpendiculaires si et seulement si $M$ appartient à la diagonale $[AC]$ ou à la diagonale $[BD]$ (privée de $B$), conformément à notre conjecture.

### Préparer une séquence d'enseignement

22. **Propriété 1**
Dans un premier temps, si on suppose que $\vec{u}=\vec{0}$, on a : d'une part $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ et d'autre part $=\frac{1}{2}\left(0+\|\vec{v}\|^2-\|-\vec{v}\|^2\right)=0$. Donc l'égalité est vérifiée. De même si $\vec{v}=\vec{0}$.
On va donc supposer maintenant que $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$. Soit $A$, $B$ et $C$ des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Notons $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AB)$. On va limiter la démonstration au cas où $H\in[AB)$.
Dans le triangle $ACH$ rectangle en $H$, on a : $\cos\left(\widehat{HAC}\right)=\dfrac{AH}{AC}$ donc $AH=AC\times\cos\left(\widehat{HAC}\right)=AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$. Donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=AB\times AH$.

D'autre part, $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{CB}\|^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)$.
Nous allons montrer cela est égal à $AB\times AH$. Il y a deux sous cas à considérer selon que le point $H$ appartient au segment $[AB]$ ou se situe en dehors de ce segment.

- Si $H$ appartient au segment $[AB]$, on a $AB=AH+HB$. D'après le théorème de Pythagore dans les triangles $AHC$ et $CHB$ rectangles en $H$, on a : $AC^2=AH^2+HC^2$ et $CB^2=BH^2+HC^2$. Donc
$\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left((AH+HB)^2+AH^2+HC^2-\left(BH^2+HC^2\right)\right)$
$=\frac{1}{2}\left(AH^2+2\times AH\times HB+HB^2+AH^2+HC^2-BH^2-HC^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(2\times AH^2+2\times AH\times HB+HB^2\right)$
$=AH^2+AH\times HB$
$=AH\left(AH+HB\right)$
$=AH\times AB$.

- Si $H$ n'appartient pas au segment $[AB]$, on a $AH=AB+BH$. De façon analogue, on a:
$\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(AB^2+AH^2+HC^2-BH^2-HC^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(AB^2+(AB+BH)^2-BH^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(AB^2+AB^2+2\times AB\times BH+BH^2-BH^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(2\times AB^2+2\times AB\times BH\right)$
$=AB^2+AB\times BH$
$=AB\times(AB+BH)$
$=AB\times AH$

**Propriété 2**

On sait que, dans un repère orthonormé, si un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $\|\overrightarrow{u}\|^2=x^2+y^2$.

Supposons donc que, dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On en déduit que $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$.

Alors, d'après la propriété 1,
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - \left(x^2 - 2xx' - x'^2\right) - \left(y^2 - 2yy' + y'^2\right)\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x^2 + 2xx' - x'^2 - y^2 + 2yy' + y'^2\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(2xx' + 2yy'\right)$
$= xx' + yy'$.

23. (a) **Trace écrite pour la commutativité**
Propriété: dans le produit scalaire de deux vecteurs, l'ordre des vecteurs peut être permuté. Autrement dit, pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
Preuve: nous pouvons utiliser la définition ou l'une des deux propriétés pour cela. Avec la dernière propriété, en se plaçant dans un repère orthonormé, il est immédiat que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = x'x + y'y = xx' + yy' = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

**Trace écrite pour la distributivité par rapport à l'addition**
Propriété: le produit scalaire entre un vecteur et une somme de deux vecteurs est égale à la somme des produits scalaires de ce vecteur avec chacun des vecteurs de la somme. Autrement dit, pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.
Preuve: nous utiliserons ici la dernière propriété, en se plaçant dans un repère orthonormé. Supposons $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$. Alors On en déduit que $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$. On en déduit d'une part : $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy''$. D'autre part, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = (xx' + yy') + (xx'' + yy'') = xx' + xx'' + yy' + yy''$.

(b) Le produit scalaire de deux vecteurs est, comme son nom l'indique, un "scalaire", c'est-à-dire un nombre réel. Un produit scalaire de plus de deux vecteurs n'a donc pas de sens. En conséquence, il n'y a pas lieu de chercher une propriété d'associativité.

24. Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. Plaçons nous dans un repère orthonormé direct d'origine $O$ et considérons les points $A$ et $B$ du cercle trigonométrique respectivement associés aux réels $a$ et $b$. Par définition des lignes trigonométriques, $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. D'autre part, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}}\right)$. Or $OA = OB = 1$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OB}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OA}}\right) = b - a$. Donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ (puisque la fonction cosinus est paire). Ainsi, on déduit la formule: $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
La première formule se déduit alors facilement: $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ car la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

25. Les deux formules précédentes permettent de comprendre la multiplication de deux nombres complexes (non nuls) sous forme trigonométrique. En effet, le module du produit de deux

nombres complexes est le produit des modules et un argument du produit est la somme d'un argument de chacun d'eux. Autrement dit, pour tous nombres complexes non nuls de la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$ où $r$ et $r'$ sont deux réels strictement positifs et $\theta$ et $\theta'$ deux réels, on a : $zz' = rr'(\cos(\theta+\theta')) + i(\sin(\theta+\theta'))$. Cette propriété se démontre grâce aux formules d'addition du cosinus et du sinus.

26. Démontrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, pour tout réel $\theta$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$ par récurrence sur $n$.
Initialisation : pour $n = 1$ l'égalité est évidente.
Hérédité: supposons que pour un entier $n \geqslant 1$, on ait $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$. Alors $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{ni\theta} \times e^{i\theta}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Or nous avons vu qu'en multipliant deux nombres complexes sous forme trigonométrique, on multiplie les modules et on ajoute les arguments; ce qui revient, avec la notation exponentielle, à la formule $zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$. Donc en appliquant cette règle, on obtient $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{i(n\theta+\theta)} = e^{(n+1)i\theta}$.
Conclusion: l'égalité est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

## Consolider des apprentissages

27. Dans l'exercice 1 de l'annexe 19, des puissances des nombres complexes $1+i$ et $1-i$ sont en jeu donc l'utilisation des formes algébriques de ces deux nombres complexes est peu judicieuse (elle donnerait lieu à l'utilisation de la formule du binôme) mais reste techniquement possible. Le recours à la notation exponentielle de la forme trigonométrique est l'écriture à privilégier ici, malgré l'addition qui n'est en général pas très compatible avec cette forme (voir corrigé plus loin). Notons en revanche qu'une méthode encore plus astucieuse, en appui sur la forme algébrique, est possible pour résoudre ce problème (voir corrigé plus loin).
Dans l'exercice 2, il est souhaitable de commencer par calculer les premiers termes de la suite et de vérifier que la propriété à démontrer est vraie lorsque $n = 1$. Pour cela, il faut calculer le nombre complexe $1 - \dfrac{1}{z_n}$ qui suggère plutôt le recours à la forme algébrique à cause de la différence (peu adaptée avec les formes trigonométriques).

28. Une correction basée sur l'utilisation de l'écriture exponentielle:
On s'appuie sur le fait que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ qui peuvent être connues ou démontrées dans un premier temps. Pour tout entier naturel $n$, $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{ni\frac{\pi}{4}} + e^{-ni\frac{\pi}{4}}\right)$ grâce à la formule de De Moivre. Maintenant nous pouvons utiliser la formule d'Euler, $S_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times 2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$. Ce résultat est le produit de deux nombres réels, ce qui prouve que $S_n \in\ R$.
Une autre méthode plus astucieuse se base sur les propriétés de compatibilité du conjugué avec les opérations: $\overline{S_n} = \overline{(1+i)^n + (1-i)^n} = \overline{(1+i)^n} + \overline{(1-i)^n} = \left(\overline{1+i}\right)^n + \left(\overline{1-i}\right)^n = (1-i)^n + (1+i)^n = S_n$. Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{z} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$, donc $S_n \in\ R$.

## Exploiter des erreurs d'élèves

29. Une définition équivalente de la congruence modulo $n$ donnée dans le document de l'annexe 20 est la suivante: "dire que deux nombres entiers relatifs $a$ et $b$ sont congrus modulo $n$ signifie que $n$ divise leur différence". Cet énoncé (qui est d'ailleurs celui de Gauss lui-même) est beaucoup plus pratique à utiliser pour les démonstrations.
Soient $a$, $b$, $c$, et $d$ quatre entiers relatifs et supposons $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ tels que $a - b = kn$ et $c - d = ln$. En multipliant chaque membre de la première égalité par $c$, il vient $ac - bc = knc$ et en multipliant chaque membre de la seconde par $b$, il vient $bc - bd = lnb$. on peut désormais ajouter membre à membre les deux égalités précédemment obtenues, ce qui donne $ac - bd = knc + lnb = n(kc + lb)$. Or $kc + lb \in \mathbb{Z}$ donc cela signifie que $n$ divise $ac - bd$ donc que $ac \equiv bd \pmod{n}$.

30. (a) Il résout l'équation $(x - 1)(x + 1) \equiv 0 \pmod{8}$ dans $\mathbb{Z}$ comme s'il résolvait l'équation $(x - 1)(x + 1) = 0$ dans $\mathbb{R}$ en se ramenant à un produit de facteurs égal à 0. Mais si $\mathbb{R}$ est un corps, en particulier est intègre, ce n'est pas le cas de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. On peut donc avoir deux nombres entiers non nuls $a$ et $b$ tels que $ab \equiv 0 \pmod{8}$ (il suffit de prendre $a = 2$ et $b = 4$).

    (b) Conjecture : on peut commencer par tester quelques valeurs pour $x$ afin de se rendre compte que seuls les nombres impairs semblent satisfaire à l'équation proposée.
    Démonstration : raisonnons par disjonction des cas.
    Tout nombre entier relatif $x$ est congru à un et un seul nombre de l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ modulo 8.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $x^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |
| reste mod 8 | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 |

    Donc $x^2 \equiv 1 \pmod{8} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{8}$ ou $x \equiv 3 \pmod{8}$ ou $x \equiv 5 \pmod{8}$ ou $x \equiv 7 \pmod{8}$. Autrement dit, lorsque $x$ est impair.

    Autre méthode : soit $x \in \mathbb{Z}$. En raisonnant sur la parité de $x$.
    Supposons que $x$ est pair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$ donc $x^2 = 4k^2$. Soit $k$ est pair et dans ce cas $x^2$ sera divisible par 8 donc $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$. Soit $k$ est impair, donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2k' + 1$ ce qui conduit à $x^2 = 4(2k' + 1)^2 = 4(4k'^2 + 4k' + 1) = 16k'^2 + 16k' + 4$ donc $x^2 \equiv 4 \pmod{8}$. Donc si $x$ est pair il ne peut pas être solution de l'équation $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ dans $\mathbb{Z}$.
    Supposons que $x$ est impair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k+1$ donc $x^2 = 4k^2+4k+1$. Donc $x^2 = 4k\,(k + 1) + 1$. Or $k$ et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est nécessairement pair. Donc $4k\,(k + 1)$ est divisible par 8 ce qui signifie que $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Donc si $x$ est impair il est toujours solution de l'équation $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ dans $\mathbb{Z}$.
    Donc l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ dans $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs impairs (conformément à la conjecture).

    (c) Un énoncé modifié: "résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2 \equiv 1 \pmod{7}$".
    En effet, il serait possible alors comme l'élève de dire que $x^2 \equiv 1 \pmod{7} \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \equiv 0 \pmod{7}$ puis $(x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow x-1 \equiv 0 \pmod{7}$ ou $x+1 \equiv 0 \pmod{7}$

car dans ce cas l'équivalence est vraie dans la mesure où 7 est premier (8 ne l'était pas). La propriété sous-jacente est la suivante: "pour tous nombres entiers relatifs $a$ et $b$, et pour tout nombre premier $p$, $p$ divise le produit $ab$ si et seulement si il divise l'un des facteurs du produit.

Démonstration: le sens réciproque est évident, si $p|a$ alors $p|ab$ et de même si $p|b$. Le sens direct est le lemme d'Euclide. Sa démonstration peut nécessiter un éventuel pré-requis: théorème de Bézout, théorème de Gauss... Par exemple, en supposant connu ce dernier théorème. Supposons donc qu'un nombre premier $p$ divise un produit $ab$. Si $p$ ne divise pas $a$ alors $p$ et $a$ sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, $p$ divise $b$.

Remarque: il existe cependant une manière de démontrer le lemme d'Euclide en se passant de ces pré-requis (méthode employée par Gauss lui-même).

31. (a) Analyse des productions d'élèves :

| | réussites | erreurs |
|---|---|---|
| élève 1 | L'élève connaît la définition de deux nombres premiers entre eux et sait trouver les nombres premiers avec 6 et inférieurs à 6, de même pour 10. | Sa rédaction est imprécise car il parle de "deux nombres premiers avec 6": il sous-entend deux nombres inférieurs à 6 premiers avec 6. De même pour 10. Ensuite, il raisonne en terme d'opérations comme si le nombre de nombres premiers avec un nombre donné était compatible avec les opérations : par exemple avec le passage au cube "s'il y a 4 nombres inférieurs à 10 premiers avec 10 alors il y en a $4^3$ inférieurs à 1000 premiers avec 1000". De même avec le produit. Ces propriétés sont évidemment fausses. |
| élève 2 | L'élève se montre capable de concevoir un algorithme et de le traduire en langage de programmation Python sans erreur de syntaxe (puisque le programme fonctionne). Il sait en particulier définir une fonction informatique avec un argument. Il sait réaliser une boucle finie, il connaît les instructions conditionnelles et est en mesure d'introduire un compteur (bien initialisé au départ). Ses réussites sont essentiellement dans le domaine algorithmique et programmation. | Au niveau mathématique, il fait clairement la confusion entre "ne pas diviser un certain entier donné" et "être premier avec cet entier". Par exemple, 8 ne divise pas 12 mais pour autant 8 n'est pas premier avec 12 (puisque 4 est un diviseur commun). Son programme ne compte que le nombre d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, inférieurs à un entier $n$ donné qui ne divisent pas cet entier. |

(b) Un programme permettant de résoudre le problème :

```python

def algo(n):
    C=0
    for k in range(2,n):
        test= False
        d=2
        while d < k+1:
            if k/d==int(k/d) and n/d == int(n/d):
                test=True
            d=d+1
        if test==False:
            C=C+1
    return(C+1)
```

```
Console
>>> algo(1000)
400
>>>
```

Remarque : pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et $n$ et premiers avec $n$. La fonction $\phi$ est appelée indicateur (ou indicatrice) d'Euler. On peut montrer que, si $p$ est premier, alors, pour tout entier $\alpha \geqslant 1$, $\phi\left(p^{\alpha}\right) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$ et que, pour tous entiers naturels $m$ et $n$ premiers entre eux, $\phi\left(mn\right) = \phi\left(m\right)\phi\left(n\right)$.
Ce problème consiste à calculer $\phi\left(1000\right)$. Avec les propriétés de l'indicateur d'Euler, on a donc : $\phi\left(1000\right) = \phi\left(2^3 \times 5^3\right) = \phi\left(2^3\right) \times \phi\left(5^3\right) = \left(2^3 - 2^2\right) \times \left(5^3 - 5^2\right) = 4 \times 100 = 400$.

**Produits définis sur différents ensembles**

32. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ des nombres réels privé de 0 est un groupe pour la multiplication, ce qui sous-entend que la multiplication est une loi de composition interne : le produit de deux nombres réels est lui-même un nombre réel. L'ensemble des vecteurs du plan est un groupe pour l'addition des vecteurs, mais le produit scalaire n'est pas une loi de composition interne: le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel (et non un vecteur!).

33. La multiplication des matrices n'est pas commutative. Par exemple, si on considère deux matrices $2 \times 2$: si $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $AB \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $BA \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

34. La propriété démontrée dans la question 29 permet de définir un produit dans l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.