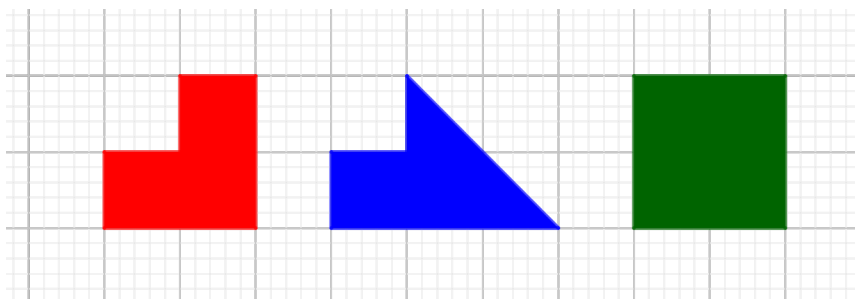


Partie 1 : la notion d'aire au collège et au lycée

I. Analyse de ressources

1. La figure rouge a la même aire que la figure modèle bleue mais un périmètre plus grand tandis que la figure verte a le même périmètre que la figure modèle bleue mais une aire plus grande.



2. Les principaux apprentissages que l'enseignant peut viser sont :
 - Comparer des surfaces selon leurs aires par superposition ou par découpage et recollement sans recours à la mesure.
 - Comparer des périmètres sans recours à la mesure.
 - Différencier périmètre et aire d'une figure.
3. Quelques arguments justifiant l'intérêt pédagogique d'un travail de groupe:
 - La tâche est relativement longue (huit figures à créer) donc les élèves peuvent se répartir le travail au sein d'un même groupe. Cela permet un gain de temps dans la gestion de la séance.
 - Les élèves peuvent débattre de leurs productions.
 - Pour la phase de validation, le professeur a moins de productions à vérifier que si chaque élève avait produit huit figures.
 - La mise en commun des productions des différents groupes permet de montrer que plusieurs figures peuvent convenir dans chacun des cas.
4. Une question pouvant être posée est de classer les trois figures dans l'ordre croissant de leur aire puis dans l'ordre croissant de leur périmètre.

II. Analyse d'une production d'élève

1. Analyse de la production de l'élève:

Réussites Le théorème de Thalès permet de justifier que $HE = \frac{1}{2}DB$ si on a d'abord établi que les droites (HE) et (BD) sont parallèles.
 Il a décomposé la figure en deux figures clés dont le traitement est analogue.
 Sa conclusion est exacte malgré les erreurs de raisonnement commises.

Erreurs La figure tracée est un cas particulier: $ABCD$ semble être un parallélogramme. Elle est codée de façon erronée.
 L'application du théorème de Thalès n'est pas justifiée: il conviendrait d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès pour établir le parallélisme des droites (HE) et (BD) puis le théorème lui-même pour justifier de la relation $HE = \frac{1}{2}DB$. Une méthode plus économique est d'appliquer le théorème de la droite des milieux et son corollaire concernant le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle.
 L'élève pense que si les longueurs des triangles semblables ABD et AEH sont dans le rapport $\frac{1}{2}$ alors il en est de même de leurs aires.
 En considérant les triangles AEH d'une part et CFG d'autre part, l'élève a exprimé une relation entre les aires du quadrilatère $ABCD$ et du polygone $EHDGFB$. Il devrait travailler également avec les triangles DHG et EFB .

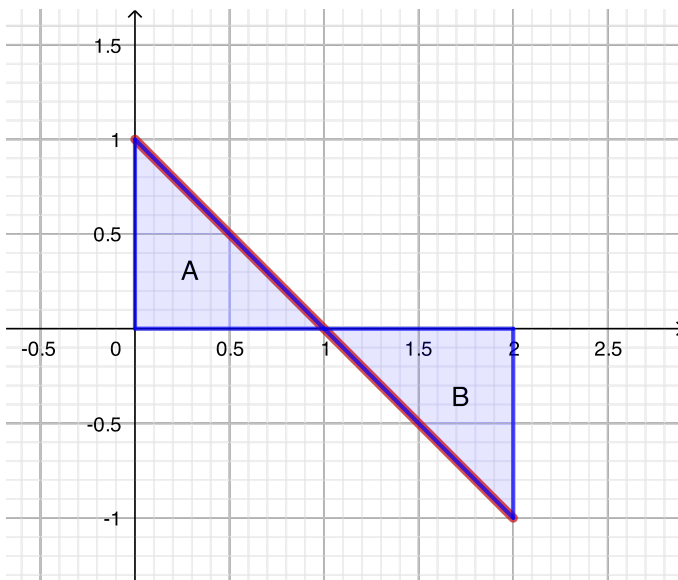
- On se place dans le triangle ABD . Le point E est le milieu de $[AB]$ et H est le milieu de $[AD]$ donc $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{1}{2}$. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (HE) et (BD) sont parallèles. Cela assure que les triangles AEH et ABD sont en configuration de Thalès. En particulier, le triangle AEH est une réduction du triangle ABD dans le rapport $\frac{1}{2}$ (on peut dire que le triangle AEH est l'image du triangle ABD par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$). Or, dans une situation d'agrandissement réduction, si les longueurs sont multipliées par un nombre k (strictement positif) alors les aires sont multipliées par k^2 . Donc l'aire du triangle AEH est égale au quart de l'aire du triangle ABD .
 On raisonne de la même façon dans les triangles CBD , DAC et BAC .
 Ainsi,

$$\begin{aligned}
 Aire(EFGH) &= Aire(ABCD) - Aire(AEH) - Aire(CGF) - Aire(DHG) - Aire(BEF) \\
 &= Aire(ABCD) - \frac{1}{4}Aire(ABD) - \frac{1}{4}Aire(CBD) - \frac{1}{4}Aire(DAC) - \frac{1}{4}Aire(BAC) \\
 &= Aire(ABCD) - \frac{1}{4}(Aire(ABD) + Aire(CBD)) - \frac{1}{4}(Aire(DAC) + Aire(BAC)) \\
 &= Aire(ABCD) - \frac{1}{4}Aire(ABCD) - \frac{1}{4}Aire(ABCD) \\
 &= \frac{1}{2}Aire(ABCD)
 \end{aligned}$$

III. Analyse d'erreur d'élève

- Les énoncés mathématiques sur le calcul intégral que doivent mobiliser les élèves :

- Définition de l'intégrale définie d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ (avec $a < b$) comme l'aire sous la courbe représentative de la fonction délimitée par l'axe des abscisses ainsi que les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
 - Relation de Chasles pour les intégrales.
 - Si f est continue et négative sur un intervalle $[a ; b]$ (avec $a < b$) alors $\int_a^b f(x) dx$ est égale à l'opposé de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses ainsi que les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
2. La bonne réponse est la réponse b.
- Distracteur a : l'intégrale est égale à la somme des aires des domaines A et B . Erreur sur la décomposition de l'intégrale en somme de trois intégrales grâce à la relation de Chasles ainsi que sur le fait que $\int_2^3 f(x) dx = -B$ car la fonction f est négative sur l'intervalle $[2 ; 3]$.
- Distracteur c : l'intégrale est égale à la somme des aires des domaines A et C . Seules les aires comptées positivement sont prises en compte.
- Distracteur d : l'intégrale est égale à la somme des aires des domaines A , B et C . L'intégrale est correctement décomposée en trois intégrales grâce à la relation de Chasles mais chacune est comptée positivement comme si elles représentaient toutes une aire.
3. Sur le graphique ci-dessous, la fonction f considérée est la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = -x + 1$.



En utilisant le calcul intégral, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$ et comparer sa valeur à la somme des aires, exprimées en unités d'aire, des domaines A et B que l'on calculera en utilisant des configurations usuelles.

L'idée est de montrer que l'intégrale vaut 0 grâce au calcul intégral et non une unité d'aire (si on somme les aires des domaines A et B).

IV. Démonstration d'un théorème de cours

Soit f une fonction continue et positive sur $[a ; b]$ (avec $a < b$). On suppose de plus f croissante sur $[a ; b]$. On définit la fonction F_a sur $[a ; b]$, par $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$. Soit enfin $x_0 \in]a ; b[$.

Pour tout $h > 0$, $F_a(x_0+h) - F_a(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$ en utilisant la relation de Chasles. Comme f est croissante sur $[a ; b]$, pour tout $t \in [x_0 ; x_0+h]$, $f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0+h)$. Donc, en intégrant sur l'intervalle $[x_0 ; x_0+h]$, on obtient : $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0+h) dt$. En calculant chacune des intégrales minorante et majorante, on obtient : $hf(x_0) \leq F_a(x_0+h) - F_a(x_0) \leq hf(x_0+h)$. D'où, en divisant chaque membre par $h > 0$, on obtient : $f(x_0) \leq \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$. Comme f est continue sur $[a ; b]$, $f(x_0+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0)$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(x_0)$.

On raisonne de façon analogue pour $h < 0$, on trouve également $\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} f(x_0)$.

Ce qui prouve que la fonction F_a est dérivable en x_0 .

La démonstration s'adapte aux bornes a et b (en se plaçant respectivement à droite ou à gauche). Comme x_0 est arbitraire, on en conclut que la fonction F_a est dérivable sur $]a ; b[$ et que sa dérivée est la fonction f . Donc F_a est une primitive de f sur $]a ; b[$. De plus, $F_a(a) = 0$ c'est la primitive de f sur $]a ; b[$ qui s'annule en a .

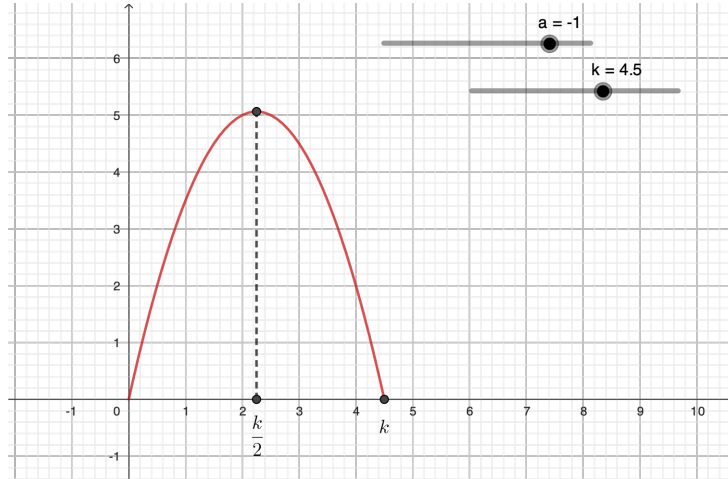
V. Mobilisation de compétences mathématiques

1. Au niveau de la compétence "calculer", la production de l'élève est très satisfaisante. Cet élève manipule parfaitement le calcul numérique: il sait calculer avec des radicaux et faire les simplifications d'écriture adéquates. Il sait également effectuer un calcul de primitive (ici d'une fonction polynôme du second degré) ainsi qu'un calcul d'intégrale.

Au niveau de la compétence "raisonner", l'élève parvient à montrer que l'affirmation d'Archimède est exacte en choisissant un exemple (il choisit des valeurs numériques pour les coefficients de la fonction polynôme plutôt que de travailler avec des paramètres). Cependant le fait de choisir la parabole de telle sorte qu'elle soit symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, montre que le choix de l'expression algébrique n'est pas laissé au hasard, cela montre à la fois une intelligence du calcul (ce choix simplifie le calcul de la hauteur de l'arche) mais également une capacité à raisonner en se plaçant dans un cas générique bien choisi (le choix de la position de la parabole dans le repère est arbitraire). En revanche, il ne justifie pas que l'intégrale sur le segment donné correspond en effet à l'aire en justifiant les conditions d'applications de la définition de l'intégrale (à savoir que la fonction intégrée est continue et positive sur le segment d'intégration).

2. Pour considérer une arche parabolique, il faut en effet considérer une fonction polynôme du second degré dont le coefficient a de x^2 est strictement négatif et qui possède deux racines distinctes. On peut toujours changer l'axe des ordonnées pour qu'une de ces deux racines soit

0. Cela permet de simplifier le calcul de la base.



Prenons donc une fonction f polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax(x - k) = ax^2 - akx$ avec $a < 0$ et $k > 0$ de telle sorte que ses racines soient 0 et k . Comme la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0 ; k]$, l'aire A de l'arche de parabole est égale à
$$A = \int_0^k f(x) dx = \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{akx^2}{2} \right]_0^k = \frac{ak^3}{3} - \frac{ak^3}{2} = -\frac{ak^3}{6}.$$

La base de l'arche est k . La hauteur de l'arche correspond au maximum de f . On sait que toute parabole est symétrique par rapport à la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par son sommet; or $f(0) = f(k) = 0$ donc l'abscisse du sommet est $\frac{k}{2}$ et le maximum de f est égal à $f\left(\frac{k}{2}\right) = a\frac{k^2}{4} - a\frac{k^2}{2} = -\frac{ak^2}{4}$. Donc $A = -\frac{ak^3}{6} = -\frac{ak^2}{4} \times k \times \frac{2}{3}$ ce qui montre que l'aire de l'arche de parabole est égale aux deux tiers de la base de cette arche multipliée par sa hauteur, conformément à l'affirmation d'Archimède.

VI. Algorithmique et programmation

1. L'enseignant doit privilégier la situation n°1. En effet, la méthode de Monte-Carlo est particulièrement adaptée à des situations où il est impossible de calculer exactement l'aire ou difficile d'en donner une approximation simple. Or, dans la situation n°2, les deux sont possibles. D'une part, on peut calculer la valeur exacte de l'aire grâce à un calcul intégral dans la mesure où, en classe de terminale, il est possible de déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$ sur l'intervalle $[0 ; 0,25]$. D'autre part, on peut donner une bonne estimation de l'aire en considérant que le domaine est presque un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 0,25 et $f(0,25) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. On parvient ainsi à une valeur approchée de $\frac{1}{16\sqrt{3}} \approx 0,0361$ ce qui est très proche de la valeur exacte $\frac{2-\sqrt{3}}{8}$.
2. L'élève a bien défini la fonction f . Dans la fonction "aire", la boucle "pour" est correcte, le compteur est bien initialisé. Le problème est l'incrémentation de l'instruction conditionnelle :

une fois les valeurs de x et y prises au hasard n fois, la condition de l'instruction conditionnelle étant vérifiée, la valeur du compteur devient 1. C'est cette valeur qui est alors affichée à la sortie. Quelle que soit la valeur de n saisie, le programme renverra toujours la valeur 0 (valeur initiale du compteur) ou la valeur 1 (au cas où la condition $y < f(x)$ est vérifiée avec le dernier couple de valeurs de x et y pris au hasard).

Il y a donc deux erreurs dans le programme de l'élève :

- L'incréméntation de l'instruction conditionnelle qui doit être dans la boucle "pour": autrement dit, le test $y < f(x)$ doit être effectué pour chaque couple de valeurs de x et y pris au hasard. Le compteur doit être incrémenté de une unité à chaque fois que le test est vrai.
- La valeur renvoyée par la fonction "aire" ne doit pas être la valeur finale du compteur car il ne peut s'agir d'une aire. La portion de plan dont on cherche une estimation de l'aire par la méthode de Monte-Carlo est implicitement englobée dans un carré de côté une unité, donc d'aire une unité d'aire. Ainsi, dans ce cas de figure, on estime l'aire de cette surface par la proportion de points à l'intérieur de la surface. La fonction "aire" doit donc renvoyer la proportion $\frac{\text{compteur}}{n}$.

3. Une version corrigée du programme serait :

```

1  from math import*
2  from random import*
3
4  def f(x):
5      y=exp(-x*x/2)/sqrt(2*pi)
6      return y
7
8  def aire(n):
9      compteur=0
10     for k in range(n):
11         x=random()
12         y=random()
13         if y<f(x):
14             compteur=compteur+1
15     return compteur/n

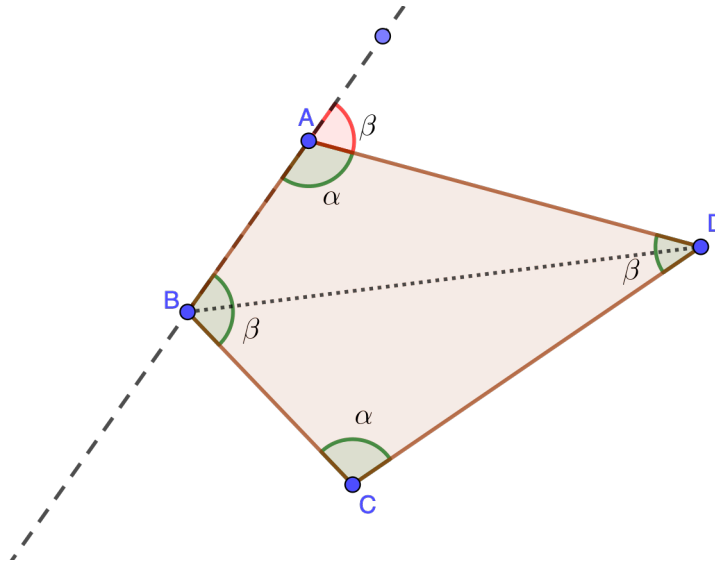
```

4. En probabilités, le résultat obtenu à l'exercice de l'annexe 11 représente la probabilité notée $P(0 \leq X \leq 1)$ où X désigne une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

Partie 2 : initiation au raisonnement

VII. Éléments d'une séquence d'enseignement

1. (a) Figure 1 : "si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur."
Figure 2 : "si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu. "
Figure 3 : "si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure. "
- (b) On dit qu'une propriété vérifiée par un quadrilatère caractérise un parallélogramme lorsqu'elle est équivalente à la proposition "un quadrilatère est un parallélogramme". Par exemple : "posséder des diagonales sécantes en leur milieu" est une propriété des quadrilatères qui est caractéristique des parallélogrammes car "un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu".
- (c) La propriété suivante: "posséder deux côtés opposés parallèles" n'est pas caractéristique des parallélogrammes. Il existe des quadrilatères qui possèdent deux côtés opposés sans être des parallélogrammes: par exemple tout trapèze non parallélogramme.
- (d) La propriété codée par la figure 3 est caractéristique des parallélogrammes parmi les quadrilatères convexes (où la notion "d'angles opposés" a du sens).
Considérons un quadrilatère (convexe) $ABCD$ dont les angles opposés ont la même mesure. Notons α et β les mesures respectives, en degrés, des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$. La somme des quatre angles d'un quadrilatère étant égale à 360° (il suffit de considérer deux triangles déterminés par une diagonale du quadrilatère), donc $2\alpha + 2\beta = 360$ donc $\alpha + \beta = 180$.



Les droites (AB) et (CD) sont coupées par la droite (AD) en formant des angles alternes-internes de même mesure, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On raisonne de façon analogue pour démontrer que les droites (AD) et (BC) sont par-

allèles. Ainsi, le quadrilatère $ABCD$ a ses côtés opposés parallèles donc, par définition, est un parallélogramme.

- (e) Avantages : le codage permet de donner une image mentale d'une propriété qui peut contribuer au repérage d'une configuration clé dans une figure complexe. Il évite le recours à un énoncé (une formulation langagière) qui peut ne pas être compris par les élèves.

Inconvénients : le codage comme dans l'annexe 13 ne permet pas de distinguer s'il s'agit du codage des hypothèses d'une propriété ou de sa conclusion. En d'autres termes, un codage de ce type ne permet pas de distinguer une propriété directe de son éventuelle réciproque.

2. (a) Avec une règle graduée : trois points A , B et D étant donnés, ① on trace le segment $[BD]$. ② on place le milieu I du segment $[BD]$. ③ on trace la droite (AI) . ④ sur cette droite, on place le point C distinct de A tel que $AI = IC$.

La propriété qui permet de justifier cette construction est : "si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme".

- (b) Si l'élève obtient un rectangle, il faut d'abord lui rappeler qu'un rectangle est un parallélogramme particulier (en effet, il a ses côtés opposés parallèles deux à deux). Donc cela ne veut pas dire que la procédure est erronée. S'il obtient un rectangle c'est qu'il s'est placé sans le savoir dans le cas particulier où les points A , B et C sont les sommets d'un triangle rectangle en A . Le parallélogramme $ABCD$ obtenu ayant un angle droit (en A) est alors un rectangle.

VIII. Classification d'exercices

exercice	démarche	type de raisonnement
1	L'énoncé est très mal posé car il n'y a pas de quantificateur. Option 1: le quantificateur sous-entendu est universel. Une démarche consiste à prendre deux valeurs particulières de a et de b afin de tester l'égalité (essais). Option 2: le quantificateur sous-entendu est existentiel. Une démarche consiste à prendre des valeurs de a et de b et de tâtonner pour trouver un couple qui convient. Option 3 : le quantificateur sous-entendu est universel et on cherche une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité soit vraie. Comme les membres sont positifs on peut raisonner par équivalences en élevant au carré : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b} \iff a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = a + b \iff 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 0 \iff \sqrt{a} = 0 \text{ ou } \sqrt{b} = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$.	Option 1 : exhiber un contre-exemple (par exemple $a = 9$ et $b = 4$). On répondra : "l'égalité n'est pas valable pour tous réels positifs a et b ". Option 2: exhiber un couple de valeurs qui convient (par exemple $a = 0$ et $b = 4$). On répondra : "il existe des valeurs de a et de b pour lesquelles l'égalité est vraie". Option 3: raisonnement par équivalences. On répondra : "l'égalité est vraie si et seulement si a ou b est nul".
2	comparer les carrés du produit des racines carrées et de la racine carrée du produit et conjecturer la formule à partir de cas particuliers	raisonnement direct par implication (grâce à la propriété suivante : "pour tous réels positifs x et y , $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ ") ou par équivalence
3	raisonner modulo 3 en considérant tous les restes de n possibles modulo 3	raisonnement déductif par disjonction des cas (ou par d'autres méthodes : voir remarque ci-dessous).
4	raisonner par récurrence sur n : initialiser pour $n = 0$ et montrer l'hérédité	raisonnement déductif par récurrence

Remarque : on notera que pour l'exercice 3, d'autres méthodes de résolution sont possibles.

- Par une démonstration par récurrence sur n :
 Pour $n = 0$, $n(n^2 + 5)$ vaut 0 et est donc divisible par 3.
 Supposons que $n(n^2 + 5)$ soit divisible par 3 pour un certain entier naturel n .
 Alors $(n+1)((n+1)^2 + 5) = (n+1)(n^2 + 2n + 1 + 5) = n(n^2 + 5) + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 6 = n(n^2 + 5) + 3(n^2 + n + 2)$. Or, par hypothèse de récurrence $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3 et $3(n^2 + n + 2)$ est divisible par 3 (car l'expression dans la parenthèse est un entier). Par somme, $(n+1)((n+1)^2 + 5)$ est divisible par 3.
 La propriété est initialisée à $n = 0$ et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n .
- Par une démonstration directe :
 La propriété est évidente si $n = 0$. Pour tout entier naturel n non nul, $n(n^2 + 5) = n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = n(n^2 - 1) + 6n = (n-1)n(n+1) + 6n$. Or le produit $(n-1)n(n+1)$ est

le produit de trois nombres entiers naturels consécutifs, donc nécessairement un des trois est divisible par 3 et le produit est lui-même divisible par 3. De plus, $6n$ est aussi divisible par 3, donc par somme $(n-1)n(n+1) + 6n$ est divisible par 3. Ce qui prouve que 3 divise $n(n^2 + 5)$ pour tout entier naturel n .

IX. Analyses de productions d'élèves

1. (a) La multiplication par 4 permet de travailler sur des coefficients entiers. On se ramène à une équation diophantienne dans $\mathbb{N}$. De cette façon, on peut raisonner sur les nombres entiers, notamment recourir à la notion de divisibilité par exemple.
- (b) Quel que soit le chiffre des unités de l'écriture décimale de y , le chiffre des unités de $10y$ sera un 0 à cause de la multiplication par 10. De plus, le chiffre des unités de $21x = 20x + x$ est le même que le chiffre des unités de x . Donc le chiffre des unités de $21x + 10y$ est le même que le chiffre des unités de x . Comme on doit avoir $21x + 10y = 1352$, le chiffre des unités de x est nécessairement un 2.

- (c) Pour une classe de terminale, option "mathématiques expertes", il serait intéressant de montrer que le raisonnement permet de résoudre le problème.

Soit x le nombre de mufliers et y le nombre de jacinthes vendus (donc x et y désignent des nombres entiers naturels). Le problème se traduit par l'équation $5,25x + 2,5y = 338$. En multipliant chaque membre de l'équation par 4 on se ramène à l'équation équivalente $21x + 10y = 1352$.

Analyse : on a $21x \equiv x \pmod{10}$, $10y \equiv 0 \pmod{10}$ et $1352 \equiv 2 \pmod{10}$ donc $x \equiv 2 \pmod{10}$. Par ailleurs comme $y \geq 0$, $21x \leq 1352$ ce qui implique que $0 \leq x \leq 64$. Donc les seules valeurs possibles pour x sont : 2, 12, 22, 32, 42, 52 et 62.

Synthèse : on teste chacune des valeurs de x précédemment trouvées. Par exemple, si $x = 2$, on a : $10y = 1310$ ce qui est possible pour $y = 131$ donc le couple (2 ; 131) convient. De même avec chacune des autres valeurs dont on montre qu'elles fournissent toutes une valeur de y entière.

Conclusion : les sept couples (2 ; 131), (12 ; 110), (22 ; 89), (32 ; 68), (42 ; 47), (52 ; 26) et (62 ; 5) sont solutions du problème.

2. (a) On pourrait proposer à l'élève de faire tourner son programme à la main en complétant un tableau d'avancement des variables :

	initialisation	1er tour	2ème tour
x	0	1	2
y	0	1	2
test	$5,25 \times 0 + 2,5 \times 0 \neq 338$	$5,25 \times 1 + 2,5 \times 1 \neq 338$	$5,25 \times 2 + 2,5 \times 2 \neq 338$

Ce tableau permet de voir que le programme ne teste que les cas où les valeurs de x et y sont égales. De plus, comme aucune solution de ce type n'existe, cela signifie que le programme ne s'arrêtera pas. L'élève dit « je ne trouve pas de solution » : en fait si le programme ne renvoie rien c'est parce qu'aucune solution de ce type n'existe. Pour cela, on peut lui faire résoudre l'équation dans le cas où $x = y$, ce qui conduit à l'équation $7,75x = 338$ dont la solution n'est pas entière.

- (b) D'abord x ne peut pas dépasser 64 et y ne peut pas dépasser 135. Un programme possible est :

```

1 | for x in range(65):
2 |     for y in range(136):
3 |         if 5.25*x+2.5*y ==338:
4 |             print(x,y)

```

3. (a) L'élève commet principalement deux erreurs. La première est de considérer une équation diophantienne dont les coefficients ne sont pas entiers et d'appliquer des théorèmes d'arithmétique à ces coefficients (algorithme d'Euclide, identité de Bézout...). La seconde est de penser que pour résoudre une équation diophantienne, il faut utiliser le théorème de Bézout. Il semble confondre le fait que les coefficients entiers a et b d'une équation diophantienne de la forme $ax + by = c$ ne soient pas premiers entre eux avec une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait des solutions dans $\mathbb{Z}^2$, à savoir le fait que le PGCD de a et de b divise c .

Le début de la résolution devrait prendre la forme suivante :

$\text{pgcd}(525; 250) = 25$ et 25 divise 33800 donc l'équation diophantienne $525x + 250y = 33800$ possède des solutions dans $\mathbb{Z}^2$. On transforme l'équation en une équation équivalente en divisant chaque membre par le PGCD de 525 et de 250. $525x + 250y = 33800 \Leftrightarrow 21x + 10y = 1352$. Notons (E) cette équation.

- (b) On cherche d'abord une solution particulière de cette équation (E). Comme $21 - 2 \times 10 = 1$, on en déduit que $21 \times 1352 + 10 \times (-2704) = 1352$. Donc $(x_0 ; y_0) = (1352 ; -2704)$ est une solution particulière de (E).

Si $(x ; y)$ est solution de (E) alors on a $21x + 10y = 21x_0 + 10y_0$ ce qui est équivalent à $21(x - x_0) = 10(y_0 - y)$. Comme 10 divise $21(x - x_0)$ et est premier avec 21, d'après le théorème de Gauss, 10 divise $x - x_0$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 10k$. Donc $2110k = 10(y_0 - y)$ d'où $y = y_0 - 21k$. Ainsi, $x = 1352 + 10k$ et $y = -2704 - 21k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, on vérifie que ces expressions sont bien solutions de l'équation (E) : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $21(1352 + 10k) + 10(-2704 - 21k) = 1352$.

Donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation diophantienne $525x + 250y = 33800$ sont les couples $(1352 + 10k ; -2704 - 21k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour trouver l'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^2$, il suffit de limiter les valeurs positives de $1352 + 10k$ et $-2704 - 21k$: la première condition implique que $k \geq -135$ et la seconde que $k \leq -129$. Donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation diophantienne $525x + 250y = 33800$ sont les sept couples : $(2 ; 131)$, $(12 ; 110)$, $(22 ; 89)$, $(32 ; 68)$, $(42 ; 47)$, $(52 ; 26)$ et $(62 ; 5)$.

X. Analyse de ressources

1. (a) Une démarche inductive peut être mise en défaut dans cet exercice: vérifier que l'assertion est vraie pour quelques valeurs de l'entier n n'assure pas qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de n .
- (b) Grâce à cet exercice, on peut travailler la signification des quantificateurs universel et existentiel : pour montrer qu'une assertion quantifiée universellement est fausse, on va exhiber un contre-exemple. Autrement dit, on travaille sur le fait que la négation de la

quantification "pour tout entiers n " est "il existe (au moins) un entier n ". Pour montrer que l'assertion "pour tout entier n , $n^2 - n + 41$ est un nombre premier" est fausse on montre que l'assertion "il existe un entier n , $n^2 - n + 41$ est un nombre premier" est vraie.

- (c) Le travail de groupe a l'intérêt de permettre un plus grand nombre d'essais pour des valeurs de n afin d'émettre une conjecture. Les élèves peuvent se répartir le travail. De plus, le travail de groupe permet aux élèves de débattre au sein d'un groupe. Précisément, certains élèves peuvent contester le fait de répondre que l'assertion est vraie à partir de l'observation d'un certain nombre de cas.

Pour le professeur, le travail de groupe permet une mise en commun plus facile car il suffit de confronter les réponses des différents groupes; réponses qui sont moins nombreuses que si chaque élève avait travaillé individuellement. Il peut ainsi organiser un débat au sein des différents groupes.

2. (a) Au niveau logique, les étapes d'un raisonnement par récurrence sont l'initialisation et l'hérédité (en général, lorsqu'on rédige, on conclut en citant le principe de récurrence). Une propriété P_n dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ si " P_{n_0} " (initialisation) et "pour tout $n \geq n_0$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ " (hérédité) sont vraies.
- (b) L'hérédité est "pour tout $k \geq 1$, $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ ". L'erreur de raisonnement consiste à penser que cette implication est vraie pour $k = 1$. L'erreur se situe dans l'étape de l'hérédité, spécifiquement lors du passage de $k = 1$ à $k = 2$. Pour que le raisonnement fonctionne, il faut que les deux sous-groupes de k boules aient au moins une boule en commun pour servir de "lien" de couleur.

- Si on a 3 boules $\{A, B, C\}$ et que $k = 2$:
Le groupe $\{A, B\}$ est de la même couleur (selon l'hypothèse). De même, le groupe $\{B, C\}$ est de la même couleur (selon l'hypothèse). Comme B est dans les deux groupes, alors A , B et C sont forcément de la même couleur. Ici, le raisonnement fonctionne.
- Si on a seulement 2 boules $\{A, B\}$ et que $k = 1$:
Le groupe $\{A\}$ est de la même couleur (vrai). Le groupe $\{B\}$ est de la même couleur (vrai). Mais il n'y a aucune boule commune aux deux groupes pour garantir que la couleur de A est la même que celle de B . On peut faire l'expérience concrète de deux boules de couleurs différentes dans une urne devant les élèves pour les convaincre de la supercherie.

En résumé, l'initialisation P_1 est vraie. L'hérédité $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ est vraie pour tout $k \geq 2$. Mais l'hérédité échoue pour $k = 1$. La chaîne de la récurrence est brisée dès le deuxième maillon ; on ne peut donc pas conclure que la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.