35. Fonctions convexes.
36. Primitives, équations différentielles.
37. Intégrales, primitives.
38. Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées).
39. Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées).
40. Exemples de modèles d'évolution.
41. Problèmes dont la résolution fait intervenir un algorithme.
42. Différents types de raisonnement en mathématiques.
43. Exemples d'approche historique de notions mathématiques enseignées au collège, au lycée.
44. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

4. Analyse et commentaires : épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

Le sujet de la première épreuve écrite était constitué de deux problèmes indépendants.
Le premier problème était un questionnaire de type Vrai – Faux avec *réponses argumentées*, abordant successivement sept thématiques au programme du concours (analyse, géométrie, matrices, pourcentages, arithmétique, dénombrement, probabilités). Le problème visait à évaluer à la fois les connaissances des candidats sur ces notions élémentaires et leur capacité à rédiger un argumentaire convaincant.
Le second problème traitait la résolution de plusieurs équations fonctionnelles, après avoir fait redémontrer, de manière guidée et détaillée, les propriétés classiques de la dérivabilité et celles de la fonction logarithme népérien.
Concernant la rédaction, on constate une orthographe encore trop souvent mal maîtrisée, notamment pour le vocabulaire lié aux mathématiques : conjugaison du verbe résoudre, « longeure », « hypothénuse », « millieu », « collinaire », « supossons », « 1/x temps vers +∞ », « en soustraillant », « inclus » / « inclue », « définient », « carthésien », « ségement », etc.
Certains candidats se contentent de phrases laconiques, dépourvues de raisonnements mathématiques consistants, montrant ainsi une vraie méprise vis à vis des enjeux de la matière et de ce concours. Leur production s'en trouve décrédibilisée et est systématiquement pénalisée par le barème.
On note un usage abusif et souvent inapproprié de symboles et de quantificateurs mathématiques en lieu et place de mots, en particulier le symbole => pour remplacer « donc ». A l'opposé, les quantificateurs sont fréquemment absents (ou mal placés, en fin de phrase) lorsqu'ils sont explicitement attendus.
On regrette aussi les confusions entre « être inclus dans » et « appartenir à », ainsi qu'entre « il faut » et « il suffit ».
Les phrases concluant un calcul sont appréciées, d'autant plus lorsque, pour une question du problème « VRAI-FAUX », il manque la réponse « vrai » ou « faux » elle-même.
La négation par un contre-exemple d'une assertion contenant un quantificateur universel implicite est assez bien maîtrisée. En revanche, un exemple ne peut tenir lieu de démonstration dans le cas d'une propriété universellement quantifiée, et de manière générale, les copies recèlent encore de nombreuses erreurs de logique (ex : « si A est inversible, alors det (A) n'est pas nul, or det(A) n'est pas nul donc A est inversible », ou « si f n'est pas la fonction nulle, alors f ne s'annule pas »).
Une démonstration par récurrence ne peut pas être esquivée par le biais de « par une récurrence immédiate, on a … » ou « par une récurrence rapide, on montrerait que ». Le raisonnement par récurrence tenant une place importante dans les programmes du lycée, il est attendu des candidats qu'ils soignent particulièrement la rédaction dans les questions concernées. En dehors de cela, les démonstrations par

récurrence sont plutôt mieux rédigées que les années précédentes, en particulier l'hérédité de la propriété, même si on relève que l'initialisation est parfois faite à un rang trop tardif.

PROBLEME 1 (vrai-faux)

L'énoncé précisait clairement qu'en l'absence d'argumentaire, la simple réponse « vrai » ou « faux » n'était pas prise en compte dans l'évaluation. A l'opposé, la réponse « Vrai » ou « Faux » est parfois absente. Dans d'autres copies, elle est contradictoire avec la démonstration proposée.
Certains candidats pensent à tort que ce type de problème à réponses binaires n'attend que des justifications laconiques et non de véritables démonstrations. Il s'agit pourtant bien de produire une réponse d'une rigueur idéalement impeccable.

I. Analyse
1. La négation de cette assertion est très souvent mal maîtrisée, notamment par incompréhension des quantificateurs sous-jacents. D'autre part, la symétrie en 0 du domaine de définition n'est jamais évoquée, ni dans cette question, ni dans le problème 2.
2. Cette question n'est correctement traitée que dans 15% des copies. On relève la confusion, courante et inquiétante, entre résoudre l'équation f(x)=x et définir une fonction f par f(x)=x.
Le théorème cité est rarement adéquat. De nombreux candidats ne font en effet pas la différence entre les équations f(x)=k et f(x)=x, ce qui les conduit à appliquer de manière inappropriée le théorème des valeurs intermédiaires. D'autres, pensant avoir exhibé un contre-exemple, n'ont malheureusement pas saisi l'importance de l'hypothèse sur le segment de définition et d'arrivée. La continuité n'est pas toujours mise en avant dans l'argumentaire.
3. On remarque sur quelques copies la confusion avec la question réciproque ainsi qu'un manque d'attention à propos des inégalités strictes et leur négation.
4. La formule de la valeur moyenne est fausse dans la plupart des cas, soit parce que le facteur 1/(b-a) est oublié, soit, pire, par confusion avec l'une des quantités (f(a)+f(b))/2, (f(b)+f(a))/(b-a) ou (f(b)-f(a))/(b-a).
5. Trop de candidats pensent que vérifier que des fonctions sont solutions d'une équation suffit généralement à la résoudre. Plusieurs arguments étaient acceptés, tant évoquer la structure (et la dimension) de l'ensemble des solutions d'une telle équation, que l'exhibition d'une autre solution que celles fournies, mais aussi la résolution complète de l'équation (souvent mal menée du fait qu'elle n'est pas homogène).
6. De nombreux candidats ne comprennent pas la question posée et examinent si la propriété énoncée concernant les suites est vraie. On constate par ailleurs un emploi abusif de l'expression « il existe *des* suites… » pour « il existe (au moins) une suite… ». On note aussi l'erreur de logique fréquente proposant la négation « il existe une suite non majorée qui diverge ».
7. Il y a souvent confusion entre la convergence de la suite (u_n) et de la série de terme général u_n, entre les suites géométriques (certains candidats pensent que (u_n) est une suite géométrique) et les séries géométriques. Lors du calcul explicite d'une somme, le 1er terme est parfois erroné.
8. La plupart des candidats comprennent que l'assertion est fausse mais l'analyse de l'erreur est souvent erronée.
II. Géométrie
9. Cette question a souvent été bien traitée.
10. On regrette la confusion fréquente entre $\times$ et un produit scalaire. L'utilisation des coordonnées de vecteurs pour calculer aisément un produit scalaire est légitime si la base de travail est orthonormée, ce point est souvent omis dans l'argumentaire. De nombreux candidats écrivent $(x|x) = ||x||$ et non $||x||^2$

11. Dans ce genre de situation, un contre-exemple est attendu, on ne peut se contenter de « on n'a pas forcément… » ou d'un argumentaire trop généraliste. On relève malheureusement trop souvent l'erreur suivante $(x-y|z)=0 \Rightarrow x-y=0$ ou $z=0$, qui démontre une méconnaissance de la notion d'orthogonalité.
12. Plusieurs arguments étaient acceptables et cette question a généralement été bien traitée. Attention à la confusion entre vecteur normal et vecteur directeur pour une droite, ou vecteurs colinéaires et vecteurs orthogonaux. Certains candidats confondent aussi point et vecteur. Il convient enfin d'éviter des raccourcis comme « $3x+y=4 \neq x+y=3$ ».
13. Là aussi, plusieurs arguments étaient recevables et pourtant cette question n'a été correctement traitée que par 1 candidat sur 3. On y recèle à la fois confusion entre point et affixe, vecteur et affixe, mais surtout, et de manière plus inquiétante, entre module et valeur absolue. On y lit par exemple « $|z-2|^2 = (z-2)^2$ », « $|z-2| = z-2$ si $z \geq 2$ ». Plus étonnamment, certains candidats mènent à terme une méthode algébrique basée sur l'écriture $z=a+ib$ et obtiennent $a=1/2$ sans pouvoir conclure.
14. Les erreurs résident essentiellement dans l'absence de soin apporté à la détermination du signe de la mesure d'angle ou de la confusion entre $\pi/6$ et $\pi/3$. On relève aussi une confusion entre quotient d'affixes et angle, la notion d'argument étant alors absente de la rédaction.
15. La plupart des candidats ont repéré, d'une façon ou d'une autre, que la droite D est incluse dans le plan P. Certains en déduisent malheureusement qu'ils sont perpendiculaires. De nombreux candidats évoquent à tort « le vecteur directeur d'un plan ».

III. Matrices

16. Cette question est assez bien traitée en général. Malgré cela, la confusion « inversible => diagonalisable » est répandue. Plusieurs candidats affirment que $M_2(R)$ est de dimension 2. Plusieurs arguments étaient acceptables, mais les conditions de diagonalisabilité énoncées sont souvent lacunaires.
17. Cette question n'a été correctement traitée que par 38% des candidats (souvent par contraposée). L'erreur principale consiste en « $AB=0 \Rightarrow A=0$ ou $B=0$ ». On a relevé aussi plusieurs fois « $\det(A)=0 \Rightarrow A=0$ ».

IV. Pourcentages

18. Cette question a été bien traitée dans 80% des copies.
19. Seulement 25% des candidats ont correctement traité cette question. Il est regrettable que certains candidats n'aient pas le recul suffisant pour réexaminer une conclusion proposant strictement plus que 100% d'exercices réussis.

V. Arithmétique

20. Cette question a globalement été bien traitée. Plusieurs méthodes étaient possibles, mais peu de candidats pensent à factoriser n^3-n. La disjonction de cas est souvent employée, mais parfois laborieuse, notamment dans le cas du calcul de $(2k+1)^3$. Très peu de candidats pensent à utiliser les congruences. En revanche, on relève parfois la regrettable confusion entre parité d'une fonction et parité d'un nombre entier.
21. Cette question n'est correctement traitée que par 23% des candidats. Certains contre-exemples proposés n'en sont pas et on trouve une utilisation inappropriée de la racine carrée dans de nombreuses copies. Dans le cas de l'utilisation de Z/nZ, l'existence éventuelle de diviseurs de zéro est souvent ignorée.

VI. Dénombrement

22. Moins de la moitié des copies fournissent une réponse correcte. Plusieurs arguments étaient acceptables (par exemple connaître le nombre exact attendu, 2^{10}, ou minorer le nombre cherché en s'intéressant aux nombres de parties à 1, 2, 3 éléments). De nombreux candidats proposent d'emblée des valeurs erronées, notamment 10 ! ou 10^{10}.
23. Cette question est abordée dans moins de 40% des cas et réussie dans seulement 10% des copies.

VII. Probabilités

24. Plusieurs candidats modélisent correctement la situation par une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique de paramètre 1/6, mais on relève par ailleurs de nombreuses confusions avec une loi binomiale. L'indépendance sous-jacente à la situation est rarement évoquée, ce qui a été sanctionné. Enfin, plusieurs candidats confondent « au moins 3 » et « exactement 3 ».

25. La notion d'indépendance n'est pas assez maîtrisée, la confusion entre événements indépendants et événements incompatibles étant particulièrement répandue. Attention, l'utilisation des probabilités conditionnelles, pas nécessaire ici, requiert certaines précautions.

PROBLEME 2 (équations fonctionnelles)

Ce second problème est globalement moins abordé que le premier. On observe que ses enjeux ne sont pas toujours bien compris ; en particulier de nombreux candidats ne comprennent pas qu'il s'agit pour commencer de redémontrer des propriétés élémentaires qu'ils utilisent allègrement à cet effet.
D'autre part, de manière générale, dans ce problème traitant de la résolution d'équations fonctionnelles, le raisonnement par analyse-synthèse (ou par équivalence) est souvent mal mené, la synthèse (ou réciproque) étant presque systématiquement oubliée.
On déplore dans ce problème un grand nombre de biais de rédaction mathématique en rapport avec la thématique des fonctions : « f(x) » au lieu de « f », « f(x)' » au lieu de « f '(x) », utilisation du symbole « lim » sans vérification préalable d'existence (notamment pour la définition du nombre dérivé), voire oubli du symbole « lim » lui-même (confusion entre taux d'accroissement et nombre dérivé par exemple).
Les récurrences ont globalement été mieux rédigées que les années précédentes, en particulier la formulation de l'hypothèse de récurrence.

I. Quelques résultats classiques

1. Dérivabilité

1.a. La réponse est correcte dans la moitié des copies. Pour le reste, il manque souvent un élément déterminant (soit le fait que la limite du taux d'accroissement doit non seulement exister mais être *finie*, soit la notion de limite elle-même, soit l'utilisation du symbole « lim » sans justification préalable).
1.b. Cette question est parfaitement traitée dans moins de 20% des copies. Il n'était pas dans l'esprit de ce début de problème d'invoquer une formule de Taylor. La notion de fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point est mal maîtrisée et souvent escamotée. On relève aussi des erreurs d'écriture particulièrement regrettables :
par exemple, « $\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) => \lim_{a} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ »
1.c.i La rédaction de cette question est très souvent bâclée.
1.c.ii. Cette question est généralement réussie (les exemples les plus fréquemment cités étant les fonctions valeur absolue ou racine carrée). Dans les autres cas, les contre-exemples proposés correspondent à des fonctions qui ne sont même pas définies en le point cité.
1.d. La formule attendue est méconnue de près de 40% des candidats, et parfaitement démontrée dans moins de ¼ des copies, ce qui est inquiétant dans le cadre de ce concours. On relève un emploi massif du symbole « lim » sans précaution (justification préalable de l'existence, découpage d'une limite en somme ou produit de deux limites). La continuité de f ou de g est souvent oubliée. On trouve une fois de plus dans cette question de nombreuses confusions entre taux d'accroissement et nombre dérivé.
1.e. Cette question n'est abordée que par la moitié des candidats. Dans ce cas, la formule est généralement correcte. La démonstration n'est en revanche réussie que dans un peu plus de 10% des copies. La notion de composée est mal maîtrisée. Les candidats qui se lancent dans une démonstration font le plus souvent apparaître un dénominateur, f(x)-f(a), qui n'est pas toujours défini, ce qui a été légèrement sanctionné.

2. La fonction logarithme népérien

2.a. De nombreux candidats oublient de préciser que ϕ est dérivable ou bien l'affirment sans justification. On note par ailleurs un manque de maîtrise du calcul de la dérivée d'une fonction dont l'une des variables est fixée.

2.b. On attendait des candidats une rédaction rigoureuse, a priori par récurrence. Les rédactions avec des « pointillés » ou du type « de proche en proche » ont été sanctionnées. Pour établir que $\ln(1/x) = - \ln(x)$, on lit souvent une déduction erronée de la récurrence en l'appliquant au cas $n = -1$.
2.c.i. Cette question a été globalement bien réussie.
2.c.ii. Cette question n'a été correctement traitée que dans 20% des copies. On relève couramment une confusion entre $g'(xy)$ et $(g(xy))'$.
2.c.iii. Lorsqu'elle est traitée, cette question est bien réussie.
2.c.iv. Rares sont les candidats qui pensent à évoquer la réciproque (ou synthèse de la résolution). Seuls 5% des copies obtiennent tous les points prévus par le barème.
2.d. Lorsqu'elle est traitée (66% des copies), cette question est réussie.
2.e. L'existence de l'entier est souvent mal justifiée (en particulier, pour les candidats qui s'attachent à expliciter une valeur de n mais ne vérifient pas qu'elle est bien positive). De même le rôle de la positivité de ln 2 (et sa justification) est escamoté.
2.f. Cette question est abordée par 65% des candidats mais n'est intégralement réussie que dans 22% des copies. Le lien avec la question précédente n'est souvent pas fait et peu de candidats démontrent leurs réponses.
2.g. La continuité est rarement évoquée. Les candidats qui cherchent à démontrer l'injectivité et la surjectivité sans utiliser le théorème de la bijection n'aboutissent généralement pas. Le fait que l'ensemble image soit précisément R n'est presque jamais correctement traité.
2.h. Cette question n'est réussie que dans 24% des copies. La légitimité des équivalences (bijectivité ou utilisation de propriétés du logarithme pas encore établies) est souvent malmenée.

II. Première équation fonctionnelle de Cauchy

3. Résultats préliminaires

3.a. Cette question élémentaire est généralement bien traitée. Une justification, même simple, était attendue.

3.b. La totalité des points prévus par le barème n'est pas toujours accordée, la symétrie du domaine de définition, même évidente, devait être évoquée.

3.c. Une preuve rigoureuse était attendue, a priori une démonstration par récurrence. Comme précédemment, l'emploi de pointillés ou de « de proche en proche » est à proscrire. La gestion des deux variables, x et n, est à soigner.

3.d. On remarque que la définition d'un nombre rationnel pose problème. Cette question, qui nécessitait un soin particulier, n'a été parfaitement traitée que dans 15% des copies.

3.e. Cette question a donné satisfaction chaque fois qu'elle a été traitée.

4. Première méthode

Cette question a été abordée dans 35% des copies et réussie dans 10% d'entre elles. Les principaux arguments (caractérisation séquentielle de la continuité, densité, réciproque) sont bien souvent omis.

5. Seconde méthode

5.a. L'existence des intégrales est souvent oubliée et, dans les autres cas, sa justification n'est pas satisfaisante.

5.b. Lorsqu'elle est abordée, cette question est généralement bien traitée.

5.c. La dérivabilité n'est en général pas ou mal justifiée. Cette question est parfaitement traitée par seulement moins de 10% des candidats.

5.d. Là encore, dans les copies abordant cette question, peu de candidats pensent à la synthèse de la résolution.

III. Restriction des hypothèses

Cette partie a globalement été très peu abordée.

6. Continuité en un point

6.a., 6.b. Ces questions ont été très peu abordées.

6.c. La conclusion attendue n'a souvent pas été perçue.

7. Monotonie

7.a., 7.b., 7.c. : ces questions ont été très peu abordées (moins de 15% des copies) et n'ont généralement pas été correctement traitées.

8. Encadrement

8.a., 8.b., 8.c. : même chose.

IV. D'autres équations fonctionnelles

9. Deuxième équation fonctionnelle de Cauchy

9.a. Le cas de la fonction nulle est souvent mal mené ou traité comme évident.

9.b.i. L'inégalité stricte attendue n'est pas souvent bien justifiée. On relève en particulier une confusion entre ne pas être la fonction nulle et ne pas s'annuler.

9.b.ii. Lorsqu'elle est abordée, cette question est bien traitée.

9.b.iii. Une nouvelle fois, la synthèse du problème posé est souvent oubliée.

10. Equation fonctionnelle de Jensen

10.a. Les formulations proposées manquent souvent de précision (notamment la continuité ou l'absence regrettable du mot « image »).

10.b., 10.c. Ces questions sont peu traitées et les réponses sont alors incomplètes.

11.a.i. On regrette que les limites ne soient pas toujours justifiées, même par un argument rapide. Pour le reste, c'est assez bien.

11.a.ii. Cette question est parfois laborieusement traitée (notamment par l'étude des variations de h pour en déduire son signe). La factorisation de $16 - x^2$ est peu utilisée.

11.b.i. Lorsqu'elle est traitée (moins de 20% des copies), cette question est rarement réussie.

11.b.ii., 11.c., 11.d. Ces questions ont été abordées par moins de 10% des candidats et elles ne sont pas correctement traitées.