4. Analyse et commentaires : épreuves écrites

4.1 Première épreuve écrite

Le sujet de la première épreuve écrite était constitué de deux problèmes indépendants.
Le premier problème était un questionnaire de type Vrai – Faux avec *réponses argumentées*, abordant successivement sept thématiques au programme du concours. Les assertions à étudier portaient sur des notions de base. Ce problème avait pour objet d'évaluer non seulement les connaissances des candidats sur ces points élémentaires mais aussi leur capacité à rédiger un argumentaire convaincant accompagnant leur réponse.
Le second problème traitait la notion de convexité, par la démonstration de ses résultats classiques, de manière élémentaire et par l'intermédiaire de questions détaillées.
Les copies sont globalement bien présentées et les questions apparaissent dans l'ordre du sujet, ce qui facilite le travail de correction. Un effort supplémentaire est attendu pour le soulignement ou l'encadrement (à la règle de préférence) des conclusions ou résultats.
Il est conseillé aux candidats, lorsqu'une question n'a pas abouti dans la phase de recherche, de faire néanmoins part des premiers éléments obtenus. Il semble que des candidats « perfectionnistes » conscients qu'ils n'ont pas terminé ou qu'ils ne sont pas en mesure de tout justifier ne répondent rien alors que leur travail de recherche pourrait fournir des éléments dignes d'être évalués. A contrario, d'autres candidats très « décomplexés » produisent des raisonnements qui relèvent de l'escroquerie. Les copies honnêtes, même de faible niveau, sont généralement valorisées.
On retrouve de manière générale des défauts déjà signalés dans les rapports de jury des sessions précédentes. Ainsi le niveau d'orthographe est très variable d'une copie à l'autre. Si on peut comprendre que le niveau de soin et d'orthographe baisse en fin de copie à cause du stress et de la précipitation, il est inquiétant de voir des copies dans lesquelles, dès la première ligne, les fautes d'orthographe ne sont pas des moindres. En particulier, certaines fautes étroitement liées au vocabulaire mathématique sont regrettables : décimeaux, Pitagore, interval, droites séquentes, « ont à » (pour « on a »), …
On continue de même de déplorer le manque de connecteurs logiques dans les calculs ou les raisonnements, d'autant plus que ce point faisait l'objet d'une attention particulière des correcteurs dans certaines questions clairement identifiables par les candidats.
Il est important d'adopter une rédaction soignée dès le début d'une réponse afin qu'elle mette bien en évidence les hypothèses de travail de la question (« Soit une fonction f telle que… », « Soit x appartenant à [0,1] » , etc).
Toujours à propos de la rédaction, on relève un emploi abusif de symboles mathématiques comme abréviations dans des phrases (« $\Rightarrow$ » pour « donc », même chose avec « $\Leftrightarrow$ »), et souvent particulièrement malvenus (« A et B $\in$ à P », « pour $\forall$ x réel », …)

On conseille enfin de nouveau aux futurs candidats de soigner, sur leur copie, la distinction entre la fonction f et l'image f(x), entre la suite (u_n) et le terme u_n.

PROBLÈME 1 : VRAI-FAUX

De nombreux candidats bâclent le QCM en donnant des réponses (V ou F) sans justification ou avec une réponse escamotée, peut-être par précipitation ou par difficulté à jauger le niveau de détail attendu dans l'argumentaire. Ces questions étaient très abordables et il n'est pas exclu que la plupart de ces candidats avaient les connaissances nécessaires pour y répondre parfaitement.
On remarque quand même globalement un manque inquiétant de maîtrise des notions qui sont au programme du secondaire et que les candidats pourraient directement être amenés à enseigner (ensembles de nombres, géométrie dans l'espace, limites de suites ou arithmétique).
On note par ailleurs une assez bonne maîtrise de l'emploi des contre-exemples pour démontrer qu'une assertion est fausse. Quelques candidats pensent en revanche qu'un exemple suffit pour montrer qu'une proposition est vraie.
En ce qui concerne les ensembles de nombres, des candidats font la confusion entre $A \subset B$ et $A \cap B = \emptyset$. Certains affirment que « si 2 est entier, alors 2 n'est pas décimal ».
Les différents ensembles de nombres sont mal connus (confusion entre réels et irrationnels, entre décimaux et rationnels, entre rationnels et irrationnels, etc.), ainsi que les structures algébriques sous-jacentes lorsqu'elles sont évoquées (ce qui n'était pas attendu).
En géométrie, les candidats semblent mieux maîtriser les outils de géométrie du plan que ceux de l'espace. En particulier les notions d'équation cartésienne et de vecteur directeur d'une droite de l'espace sont mal comprises par beaucoup de candidats.

I. <u>Ensembles de nombres</u>

1. Quelques candidats confondent inverse et opposé. Il n'était pas nécessaire ici d'employer le vocabulaire des structures algébriques ; en revanche quand il est employé, il est rarement maîtrisé : on a ainsi lu à plusieurs reprises que «(Z,x) est un groupe » ou que « (Z*,x) est un corps ».
2. La définition d'un nombre décimal est globalement mal connue, voire confondue avec celle d'un nombre rationnel. Son écriture est elle aussi mal maîtrisée. On trouve dans certaines copies que « la somme de deux nombres décimaux peut être un nombre entier et donc n'est pas un nombre décimal », assertion qui soulève aussi le problème de la compréhension de la notion d'inclusion.
3. La majorité des candidats savent que l'assertion est fausse mais les justifications sont souvent insatisfaisantes (l'argument « 3 ne divise pas 10 » n'est pas suffisant, le recours à la notion de développement décimal illimité -qui n'était pas nécessaire ici- est souvent mal maîtrisé). Il est rappelé que cette démonstration peut être faite en classe de seconde.
4. Il s'agit aussi ici d'une assertion qui relève du programme de seconde. Beaucoup de candidats s'engagent bien dans une démonstration par l'absurde mais peu la mènent à terme, le rôle de la primalité de 5 n'étant souvent pas perçu. En particulier il est difficile d'évaluer le raisonnement des candidats qui se contentent d'affirmer que « si $5|p^2$ alors $5|p$ ». Sur le modèle de $\sqrt{2}$, les candidats se perdent dans des arguments de *parité,* inadéquats ici. Certains candidats concluent prématurément sur une contradiction dès lors que deux entiers p et q premiers entre eux sont tels que q^2 divise p^2. Quelques copies, rares, confondent nombres irrationnels et nombres complexes.
5. Cette question a globalement été bien traitée, en dehors de quelques copies où on lit par exemple que $\sqrt{9} = \pm 3$.
6. Beaucoup de candidats pensent à utiliser un contre-exemple. Mais certains utilisent $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$ comme contre-exemple ! Parmi les arguments faux, on trouve « R\Q est un groupe » ou « un irrationnel est de la forme $\sqrt{m}$ où m est un entier ».
7. La bonne réponse (vrai) est généralement donnée mais pas toujours justifiée.

II. <u>Géométrie dans le plan</u>

8. Étonnamment, cette question donne lieu à de nombreuses erreurs menant à la réponse « faux » : « c'est le point d'abscisse 3/2 », « 3x=2 est l'équation d'un point », « dans le plan, on travaille avec des x et des y, pas seulement un x », … Lorsque la réponse « vrai » est donnée, le vocabulaire devient parfois très approximatif (« c'est une droite verticale passant par 3/2 », « x=3/2 est la droite … », …). Quelques candidats pensent qu'une droite du plan a nécessairement une équation de la forme y=ax+b.
9. Cette question est plutôt bien traitée, si ce n'est parfois une confusion entre vecteur et ses coordonnées. On note aussi dans quelques copies une confusion entre déterminant et produit scalaire. Le rôle du repère orthonormé pourrait être plus clairement mis en avant dans la rédaction, du moins mentionné.
10. Lorsque la méthode employée passe par l'introduction d'un repère, l'importance du fait qu'il soit orthonormé passe là aussi souvent inaperçue. Quelques copies passent allègrement de vecteurs à des distances. En dehors de cela, c'est une question bien réussie dans l'ensemble.

III. <u>Géométrie dans l'espace</u>

On déplore globalement dans cette partie l'application inappropriée à l'espace de résultats de géométrie plane.
11. Trop nombreux sont les candidats qui pensent que l'assertion est vraie. Par analogie avec la géométrie plane, plusieurs candidats écrivent que D et D' sont perpendiculaires à une même droite pour conclure. Certains parlent « du vecteur directeur du plan » pour affirmer que D et D' sont parallèles. L'utilisation d'un cube fournie par certains candidats éclaire bien la situation.
12. De nombreux candidats croient l'assertion vraie.
13.a. Cette question est globalement bien traitée. Attention toutefois à l'erreur de logique consistant à conclure en s'appuyant sur le fait que « si A appartient à la droite, alors ses coordonnées vérifient les deux équations ».
13.b. Cette question n'a pas toujours été bien traitée, même si plusieurs méthodes étaient possibles.
13.c. Là aussi plusieurs méthodes étaient envisageables. Celle consistant à effectuer des « combinaisons » d'équations n'a cependant pas toujours été clairement étayée par les candidats.

IV. <u>Matrices</u>

14. Cette question, pourtant élémentaire, a révélé d'importantes lacunes sur la notion de rang, notamment une confusion répandue entre rang et « format » (« les matrices sont de taille 2x2 donc de rang 4 »), inquiétante pour des candidats ayant pour la plupart suivi un cursus universitaire en mathématiques. En dehors de cela, le rang est souvent donné sans explication.
15. Cette question est traitée de manière inégale. Les candidats qui pensent aux invariants de similitude classiques (trace, déterminant, polynôme caractéristique) maîtrisent parfois mal leur rôle (« Si 2 matrices ont même polynôme caractéristique alors elles sont semblables »). De nombreux candidats ignorent la définition de matrices semblables (« deux matrices sont semblables si et seulement si elles sont proportionnelles » , «… si et seulement si elles sont identiques », « … si et seulement si elles ont la même taille »).
16. Les critères de diagonalisabilité sont mal connus (certains candidats pensent en particulier qu'il faut des valeurs propres distinctes pour être diagonalisable). D'autres se lancent dans des calculs, inutiles ici. Par ailleurs le calcul du déterminant (et en particulier sa non-nullité) est souvent mis en avant pour conclure, montrant manifestement une confusion avec l'inversibilité.
17. Ici aussi, de nombreux candidats se lancent dans de longs calculs inutiles, voire une diagonalisation complète (recherche des espaces propres, des deux matrices de passages).

V. <u>Suites</u>

18. Trop de candidats pensent que cette assertion est vraie. Les candidats qui n'exhibent pas de contre-exemple se contentent d'affirmer que la suite peut converger vers une limite supérieure à 0 mais ne fournissent pas d'exemples concrets.
19. Cette question a été plutôt bien traitée, notamment à l'aide d'un contre-exemple. Les erreurs consistent à confondre avec l'énoncé (correct) contenant l'hypothèse supplémentaire d'une limite commune aux deux

suites extraites, ou bien avec l'énoncé (correct) réciproque. Quelques candidats, confondant sans doute avec la notion de recouvrement d'une suite par deux de ses suites extraites, affirment que $u_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

VI. <u>Probabilités</u>

Il était possible d'invoquer le même argument pour les trois assertions (loi binomiale) pourvu d'en justifier le contexte.

20. L'indépendance est rarement évoquée. Le recours à une loi binomiale est mal justifié (voire pas du tout). De manière générale la modélisation utilisée est peu étayée (y compris pour l'utilisation d'un arbre).

21. L'explicitation de la formule donnée par la loi binomiale est parfois escamotée et le résultat s'en trouve parachuté. On remarque que de nombreux candidats utilisent encore l'ancienne notation du coefficient binomial (ce qui n'a bien sûr pas été sanctionné).

22. Cette question a été plutôt bien traitée, soit par reconnaissance directe de l'espérance d'une loi binomiale, soit par un calcul « à la main ». Pour le reste, on trouve dans plusieurs copies l'erreur « Faux car, avec ce barème, le professeur ne peut pas obtenir des notes à virgules ».

VII. <u>Arithmétique</u>

23. Cette question a été globalement bien traitée. Les quelques erreurs, inquiétantes sur cette question très élémentaire d'arithmétique, concernent une confusion entre multiple et diviseur, ou d'une erreur de logique (penser démontrer que l'assertion est vraie en exhibant un exemple qui fonctionne), ou encore d'une confusion avec le théorème de Gauss.

24. Là aussi, cette question a été plutôt bien réussie, même si les erreurs sont tout aussi inquiétantes pour des candidats au CAPES de mathématiques (par exemple (ka)(k'a)=(kk')a).

25. Cette question pouvait être traitée de nombreuses façons pourtant les réponses fournies n'ont souvent pas été totalement satisfaisantes. Quand il a été cité, le fait que 19 et 53 soient premiers entre eux n'a pas toujours été rigoureusement exploité.

PROBLÈME 2 : **convexité**

La plupart des candidats ne sont pas allés au-delà de la partie II.

Très peu de candidats réussissent à illustrer géométriquement les inégalités, c'est d'autant plus regrettable que les interprétations demandées sont très classiques.

De manière générale, les copies ont souvent donné lieu à une manipulation hasardeuse d'inégalités (en particulier multiplication par un nombre sans tenir compte de son signe).

I. <u>Préliminaires</u>

Les réponses aux questions de cette partie n'ont globalement pas été satisfaisantes. Les définitions de la croissance d'une fonction ou de sa continuité en un point sont notamment mal maîtrisées. De nombreux candidats répondent par des énoncés sans quantificateurs ou mêlant maladroitement français et quantificateurs mathématiques.

1. On rencontre trop souvent la confusion entre croissance d'une fonction et croissance d'une suite ce qui donne « f(x+1)>f(x) ». Nombreux sont aussi les candidats utilisant la dérivée pour caractériser la croissance de f sans se soucier de l'absence de l'hypothèse de dérivabilité. Enfin, assez régulièrement, l'implication attendue entre « $(x \leq y)$ » et « $(f(x) \leq f(y))$ » est remplacée par une virgule.

2. Le « et » attendu est souvent remplacé par une virgule inappropriée. Certains candidats sembler penser qu'une fonction qui n'est pas croissante est nécessairement décroissante (c'est en tout cas cette assertion qu'ils cherchent à quantifier). De manière générale, on regrette que la négation d'une implication soit si mal maîtrisée.

3. Cette question est rarement bien traitée. Parmi les erreurs les plus fréquentes viennent l'ordre des quantificateurs, ainsi que la confusion entre fonction affine et linéaire. On rencontre aussi plusieurs fois le fait que a et b doivent être non nuls (ou seulement b non nul) dans l'écriture f(x)=ax+b. On note enfin des confusions entre la fonction et la droite la représentant.

4. La réponse quantifiée proposée est souvent incorrecte (oubli des valeurs absolues, mauvais ordre des termes quantifiés, phrase incomplète). De nombreuses réponses utilisent le symbole « lim », escamotant ainsi la réponse attendue. Certains candidats pensent que l'égalité des limites à gauche et à droite suffit.

II. <u>Quelques propriétés et exemples</u>

5. Cette question est globalement très bien réussie, si ce n'est les cas où x, y, λ sont utilisés sans avoir été introduits au préalable.

6.a. Dans la majorité des cas, seule une implication (la réciproque) est prouvée sans que le candidat s'en aperçoive. Le recours aux barycentres n'était pas vraiment pertinent ici (le résultat admis utilisé étant trop étroitement lié à celui à démontrer).

6.b. Le fait qu'aucune démonstration n'était demandée ne signifiait pas qu'on pouvait se contenter d'une illustration simpliste (une courbe ne suffisait pas, ni même une courbe et une corde). De manière générale, on attend des représentations graphiques soignées et informatives.

7.a. Cette question a globalement été bien réussie. Attention toutefois au soin apporté aux notations (« f + g (x) » n'est pas convenable) et à ne pas oublier d'étape dans les calculs. Dans cette question et la suivante, il est regrettable que de nombreux candidats n'introduisent pas les objets et variables utilisés.

7.b. Lorsque plusieurs hypothèses sont successivement utilisées comme c'était le cas ici, les correcteurs sont particulièrement vigilants à ce que chaque étape soit explicitée et chaque hypothèse citée au moment opportun. On relève une confusion entre $f \circ g$ et fg dans certaines copies.

7.c. « Sans démonstration » n'interdit pas de vérifier au brouillon la réponse proposée : de nombreux candidats pensent qu'il faut que g soit concave et décroissante.

8.a. Les correcteurs ont valorisé les copies qui pensaient à mentionner l'« inégalité triangulaire ». Les rédactions par disjonction de cas selon les signes de x et y ont rarement été concluantes. La représentation graphique de la fonction ne suffisait pas.

8.b. Compte tenu de la progression du sujet, il était prématuré ici d'utiliser le critère portant sur la dérivée (première ou seconde) de la fonction. Très peu de raisonnements aboutissent et de trop nombreuses démarches relèvent de l'arnaque.

8.c.i. On relève plusieurs erreurs dans le calcul de g'' (qui n'était d'ailleurs pas nécessaire). Quelques candidats proposent des arguments élémentaires et corrects usant d'une décomposition de g' en composée de fonctions dont la monotonie est connue. Certains candidats cherchent le signe de g', ce qui laisse penser à une confusion entre monotonie et signe.

8.c.ii. Cette question a rarement été abordée. Peu de candidats pensent à l'inégalité des accroissements finis qui permettait de répondre rapidement (à condition toutefois de citer ses hypothèses et de vérifier qu'elles sont satisfaites). Plusieurs candidats ont répondu avec succès grâce au calcul intégral.

8.c.iii. Le signe de x-y est rarement mentionné.

8.c.iv. On constate souvent une confusion entre des théorèmes (théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle, théorème de la bijection strictement monotone). La continuité de la fonction est fréquemment omise dans les arguments. L'unicité est particulièrement mal prouvée.

8.c.v. Presque aucun candidat n'a pensé à évoquer le cas où x>y avant de conclure.

9. Cette question a été très peu traitée. Quand elle l'est, la rédaction de l'hypothèse de récurrence pose un premier problème. La principale difficulté, arriver à se placer dans les conditions de pouvoir utiliser correctement l'hypothèse de récurrence, est très exceptionnellement surmontée. Globalement la rédaction est confuse et non aboutie.

10.a. On regrette que la croissance de la fonction logarithme ou de la fonction exponentielle ne soit parfois pas mentionnée. Attention aux formulations abusives du type « on passe à l'exponentielle ».

10.b. Le suivi des intervalles après composition est mal géré. Des candidats cherchent à démontrer l'inégalité en utilisant ln et non $\ln \circ \ln$ et certains ne pensent pas à utiliser les résultats précédemment établis.

III. <u>Inégalité des trois pentes et conséquences.</u>

11.a.i. On relève de très nombreuses erreurs dues aux signes des éléments en jeu dans cette question.

A partir de cette question et jusqu'à la fin de cette partie III., les questions ont été rarement abordées.

IV. <u>Caractérisation des fonctions convexes dérivables</u> (questions 14 à 16)

V. <u>Différentes inégalités</u> (questions 17 à 18)

Les diagrammes suivants décrivent les résultats obtenus par les candidats, question par question (ici « réponse incorrecte » peut désigner une réponse jugée en partie seulement correcte ou bien totalement incorrecte) :