

Ce corrigé a été rédigé par Nicolas Billerey qui en a fait très gentiment cadeau à Bibm@th !

Pour signaler une erreur : forum@bibmath.net

Problème n° 1 : VRAI - FAUX

I. Ensembles de nombres

1. FAUX. Par exemple, l'entier 2 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$.
2. VRAI. Soient $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{b}{10^m}$ (avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n, m \in \mathbb{N}$) deux nombres décimaux. Alors

$$\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m} = \frac{10^m a + 10^n b}{10^{n+m}}$$

est un nombre décimal.

3. FAUX. Si $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $3a = 10^n$, puis 3 divise 10^n . Or 3 est premier, donc 3 divise 10, ce qui est absurde.
4. VRAI. Si $\sqrt{5}$ est rationnel, alors il s'écrit $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. Quitte à simplifier la fraction, on peut de plus supposer a et b premiers entre eux. On a alors $5b^2 = a^2$, puis $5 \mid a$ car 5 est premier. Il existe donc $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 5a'$. Ainsi, on a $b^2 = 5a'^2$ et pour les mêmes raisons que précédemment, 5 divise également b , ce qui est absurde puisqu'on a supposé a et b premiers entre eux.
5. FAUX. Par exemple, le nombre $\sqrt{1} = 1$ est rationnel.
6. FAUX. Par exemple, les nombres $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ sont irrationnels mais leur somme est nulle, donc rationnelle.
7. VRAI. Soient $\frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, un nombre rationnel et x un nombre irrationnel. Si $x + \frac{a}{b}$ est rationnel, alors il existe $c, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$ tels que $x + \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, puis $x = \frac{-ad+cb}{bd}$, ce qui est absurde car x est irrationnel.

II. Géométrie dans le plan

8. VRAI. Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ définit une équation (cartésienne) de droite dans le plan. Ici, il s'agit de la droite correspondant au choix $(a, b, c) = (2, 0, -3)$.
9. VRAI. On a $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et les droites (AB) et (CD) sont bien perpendiculaires.
10. FAUX. On a $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$ car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (le triangle ABC est rectangle en A) et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = AC^2 = 4^2 = 16$.

III. Géométrie dans l'espace

11. FAUX. La droite D engendrée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (droite des abscisses) et celle D' engendrée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (droite des ordonnées) sont parallèles au plan P d'équation $z = 0$. Or D et D' ne sont pas parallèles.

12. FAUX. Dans l'espace, l'équation $2x + 3y = 3$ définit un plan.

13. a. VRAI. En effet, $(1, 0, 1)$ est solution du système d'équations $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

b. FAUX. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -y - 2z = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3z \\ y = 2 - 2z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi un vecteur directeur de la droite D est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

c. VRAI. Soit $(x, y, z) \in \Delta$. On a $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, puis

$$(x + 2y + z) + 2 \times (x + y - z) = 2 + 2 \times 0 = 2,$$

c'est-à-dire $3x + 4y - z = 2$. Donc Δ est bien contenue dans le plan P .

IV. Matrices

14. VRAI. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont de rang 1.

15. FAUX. Deux matrices semblables ont la même trace. Or ce n'est pas le cas des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

16. FAUX. En effet, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$ admet une solution non nulle si et seulement si $\lambda = 1$. Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet une unique valeur propre (égale à 1) et le sous-espace propre associé est de dimension 1 (engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$). Donc A n'est pas diagonalisable.

17. VRAI. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ admet 2 valeurs propres : 1 et 2. La concaténation d'un vecteur propre pour chacune des ces deux valeurs propres forme une base de $\mathbb{R}^2$. Concrètement, on a par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

V. Suites

18. FAUX. Par exemple, la suite $(1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, mais elle ne converge pas vers 0.

19. FAUX. Par exemple, pour la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ vérifie que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent (elles sont constantes), mais la suite $(u_n)_n$ ne converge pas.

VI. Probabilités

La variable aléatoire X donnant le nombre de réponses correctes fournies par l'élève suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{2}$. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, on a donc $\mathbf{P}(X = k) = \binom{5}{k} \frac{1}{2^5}$.

20. VRAI. On a $\mathbf{P}(X = 5) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

21. VRAI. On a $\mathbf{P}(X = 3) = \binom{5}{3} \frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}$.

22. VRAI. La note moyenne à laquelle l'élève peut prétendre est $\mathbf{E}(X) = np = 2,5$ ou directement :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^5 k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^5 k \binom{5}{k} \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}(5 + 20 + 30 + 20 + 5) = \frac{80}{32} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

VII. Arithmétique

23. FAUX. Par exemple, si $a = b = 2$, on a bien a et b qui divisent $c = 2$, mais $ab = 4$ ne divise pas c .

24. VRAI. L'entier bc est même un multiple de a^2 . En effet, par hypothèse, il existe $b', c' \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ab'$ et $c = ac'$. D'où, on a $bc = a^2b'c'$.

25. VRAI. On a $19x \equiv 3 \pmod{53}$ si et seulement si il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $19x + 53y = 3$. Or 19 et 53 étant premiers entre eux, cette dernière équation admet des solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ par le théorème de Bézout. (L'ensemble des solutions de l'équation de congruence $19x \equiv 3 \pmod{53}$ est $\{42 + 53k ; k \in \mathbb{Z}\}$.)

Problème n° 2 : convexité

I. Préliminaires

1. L'assertion « f est croissante sur I » se traduit à l'aide de quantificateurs par :

$$\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

2. L'assertion « f n'est pas croissante sur I » se traduit à l'aide de quantificateurs par :

$$\exists x, y \in I, x \leq y, f(x) > f(y).$$

3. L'assertion « f est une fonction affine sur I » se traduit à l'aide de quantificateurs par :

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = ax + b.$$

4. L'assertion « f est continue en un point a de I » se traduit à l'aide de quantificateurs par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

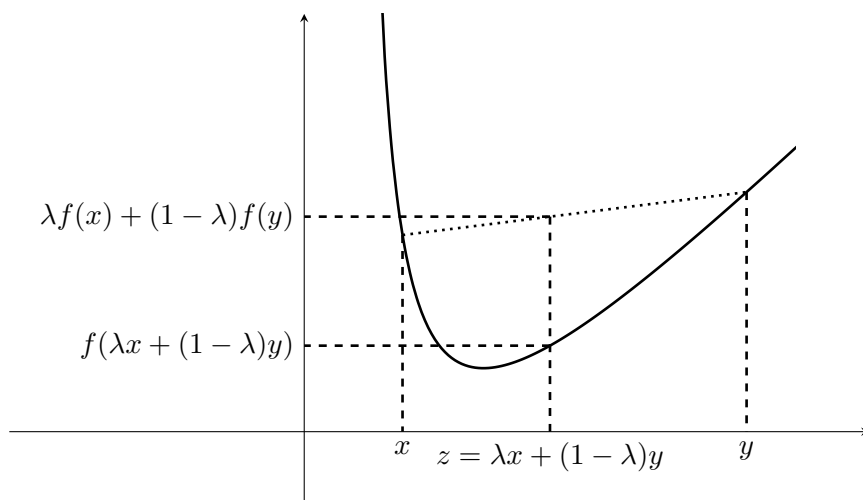
II. Quelques propriétés et exemples

5. Une fonction f est concave sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

6. Caractérisation graphique de la convexité.

- a. Si $z \in [x; y]$, alors il existe $t \in [0; 1]$ tel que $z = x + t(y - x)$. D'où $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ en posant $\lambda = 1 - t \in [0; 1]$. Réciproquement, s'il existe $\lambda \in [0; 1]$ tel que $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, alors $z = x + t(y - x)$ avec $t = 1 - \lambda \in [0; 1]$, et donc $z \in [x; y]$.
- b. La notion de convexité se traduit géométriquement par le fait que pour tout $(x, y) \in I^2$, le segment $[(x, f(x)); (y, f(y))]$ de $\mathbb{R}^2$ se situe au-dessus de la courbe représentative de f entre x et y .



7. a. Soit $(x, y) \in I^2$ et soit $\lambda \in [0; 1]$. On a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in I$ par la question précédente puis

$$\begin{aligned}(f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \quad \text{car } f, g \text{ convexes} \\ &\leq \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y).\end{aligned}$$

Donc $f + g$ est convexe sur I .

- b. Soit $(x, y) \in I^2$ et soit $\lambda \in [0; 1]$. Comme f est convexe sur I , on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Par ailleurs, $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \in J$ car J est un intervalle et $f(x), f(y) \in J$. D'où, par croissance de g sur J , il vient

$$(g \circ f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) = g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)).$$

Enfin, comme g est convexe sur J , on en déduit

$$g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1 - \lambda)g(f(y))$$

et le résultat souhaité.

- c. Voici deux énoncés du même type permettant de conclure que $g \circ f$ est concave.
- Soient f une fonction convexe sur I à valeurs dans J et g une fonction concave et décroissante sur J . Alors $g \circ f$ est concave sur I .
 - Soient f une fonction concave sur I à valeurs dans J et g une fonction concave et croissante sur J . Alors $g \circ f$ est concave sur I .

8. Quelques exemples.

- a. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1 - \lambda)y| = \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|,$$

car λ et $1 - \lambda$ sont positifs ou nuls. D'où le résultat.

- b. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. On rappelle que l'on a $2xy \leq x^2 + y^2$. Il vient alors

$$\begin{aligned}(\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 &= \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy + (1 - \lambda)^2 y^2 \\ &\leq (\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda))x^2 + ((1 - \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda))y^2 \\ &\leq \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

- c. i. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a

$$g'(t) = \frac{x - y}{tx + (1 - t)y} + \ln(y) - \ln(x). \quad (1)$$

Comme $x < y$, la fonction $t \mapsto tx + (1 - t)y$ est strictement décroissante. Par ailleurs, elle est à valeurs dans $[x; y] \subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction g' est strictement décroissante.

- ii. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\ln$ sur l'intervalle $[x; y]$, il existe un réel $\theta \in]x; y[$ tel que

$$\frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} = \frac{1}{\theta}.$$

On en déduit les inégalités demandées.

iii. D'après la formule (1) et la question précédente, on a

$$g'(0) = \frac{x-y}{y} + \ln(y) - \ln(x) = (x-y) \left(\frac{1}{y} - \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x-y} \right) \geq 0$$

et

$$g'(1) = \frac{x-y}{x} + \ln(y) - \ln(x) = (x-y) \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x-y} \right) \leq 0.$$

iv. La fonction g' est continue sur $[0; 1]$ et vérifie $g'(0)g'(1) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc au moins une fois sur $[0; 1]$. Par ailleurs, la fonction g' est strictement décroissante sur $[0; 1]$ et donc s'annule au plus une fois. D'où le résultat.

v. D'après la question précédente, la fonction g est croissante puis décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$. Comme $g(0) = g(1) = 0$, on en déduit qu'elle est positive sur $[0; 1]$, ce qui se traduit par l'inégalité suivante, valable pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x < y$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\ln(tx + (1-t)y) \geq t \ln(x) + (1-t) \ln(y).$$

Si $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est tel que $x > y$, en appliquant l'inégalité précédente avec (x, y) remplacé par (y, x) et $t \in [0; 1]$ remplacé par $1-t$, il vient à nouveau :

$$\ln(tx + (1-t)y) \geq t \ln(x) + (1-t) \ln(y).$$

Par ailleurs, cette inégalité est clairement vérifiée pour $x = y$ et $t \in [0; 1]$ quelconque. On a donc bien démontré que la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Généralisation de l'inégalité de convexité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H(n)$ la proposition de récurrence suivante :

« Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I \quad \text{et} \quad f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k). \quad \gg$$

Pour $n = 1$, le résultat est immédiat.

Soit $n \geq 1$ entier. On suppose que $H(n)$ est vraie et on considère $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. On montre que l'on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \in I \tag{2}$$

et

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k). \tag{3}$$

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et les relations (2) et (3) sont satisfaites. On peut donc supposer que l'on a $0 \leq \lambda_{n+1} < 1$. Ainsi, on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Or, si pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}}$, on a $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$. Par hypothèse de récurrence $H(n)$ appliquée à $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, il vient $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \in I$. On conclut alors à la relation (2) avec la question **6.a** appliquée à $x = x_{n+1} \in I$, $y = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \in I$ et $\lambda = \lambda_{n+1}$ (si $x < y$). Par ailleurs, avec ces notations, on a

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\
&\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \text{car } f \text{ est convexe} \\
&\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^n \mu_k x_k\right) \\
&\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^n \mu_k f(x_k) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité (3).

Ainsi, la proposition $H(n+1)$ est vraie.

On a montré que $H(1)$ est vraie et, pour tout entier $n \geq 1$, on a vérifié que si $H(n)$ est vraie alors $H(n+1)$ est encore vraie. Par principe de récurrence, la proposition $H(n)$ est donc vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

10. Deux applications.

- a.** La fonction $\ln$ est concave. D'après la question précédente, pour tout $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a en particulier

$$\frac{1}{3} \ln(a) + \frac{1}{3} \ln(b) + \frac{1}{3} \ln(c) \leq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

d'où il vient

$$\ln(\sqrt[3]{abc}) \leq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

et l'inégalité souhaitée en appliquant la fonction (croissante) $\exp$.

- b.** Soient $(x, y) \in]1, +\infty[^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par concavité de la fonction $\ln$ sur $]1, +\infty[$, on a

$$\ln(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \ln(x) + (1 - \lambda) \ln(y).$$

Par croissance de la fonction $\ln$, il vient alors :

$$(\ln \circ \ln)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \ln(\lambda X + (1 - \lambda)Y)$$

avec $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$. Enfin, à nouveau par concavité de la fonction $\ln$, cette fois-ci sur l'intervalle $]0, +\infty[$ contenant X et Y , on en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned}
(\ln \circ \ln)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\geq \lambda \ln(X) + (1 - \lambda) \ln(Y) \\
&\geq \lambda (\ln \circ \ln)(x) + (1 - \lambda) (\ln \circ \ln)(y)
\end{aligned}$$

et la concavité de la fonction $\ln \circ \ln$ sur $]1, +\infty[$.

On en déduit que l'on a

$$\begin{aligned} (\ln \circ \ln) \left(\frac{x+y}{2} \right) &\geq \frac{1}{2} ((\ln \circ \ln)(x) + (\ln \circ \ln)(y)) \\ &\geq \frac{1}{2} \ln(\ln(x) \ln(y)) \\ &\geq \ln \left(\sqrt{\ln(x) \ln(y)} \right) \end{aligned}$$

et le résultat souhaité en appliquant la fonction (croissante) $\exp$.

III. Inégalités des trois pentes et conséquences

11. a. i. On a

$$\begin{aligned} f(u) - f(a) &= f(\lambda t + (1-\lambda)a) - f(a) \\ &\leq \lambda f(t) + (1-\lambda)f(a) - f(a) \quad \text{par convexité de } f \\ &\leq \lambda(f(t) - f(a)). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\lambda = \frac{u-a}{t-a}$ et comme $u - a < 0$, il vient

$$\frac{f(u) - f(a)}{u - a} \geq \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

ou encore $\Delta_a(t) \leq \Delta_a(u)$.

ii. On en déduit que la fonction Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

b. i. On a $\lambda x + (1-\lambda)y \in]x; y]$. Donc par croissance de la fonction Δ_x sur $]x; y] \subset I \setminus \{x\}$, il vient $\Delta_x(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Delta_x(y)$.

ii. L'inégalité de la question précédente se traduit par

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x},$$

puis par l'inégalité $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ en multipliant par $(1-\lambda)(y-x) > 0$. Cette inégalité est par ailleurs triviale pour $\lambda = 1$. Par un raisonnement analogue à celui de la question 8.c.v, il vient alors que f est convexe sur I .

c. La fonction f convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

12. a. D'après la question 11 et les inégalités $a < b < c$, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \Delta_a(b) \leq \Delta_a(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c-a} = \Delta_c(a) \leq \Delta_c(b) = \frac{f(c) - f(b)}{c-b}.$$

b. On illustre graphiquement les inégalités

$$\Delta_a(b) \leq \Delta_a(c) = \Delta_c(a) \leq \Delta_c(b).$$

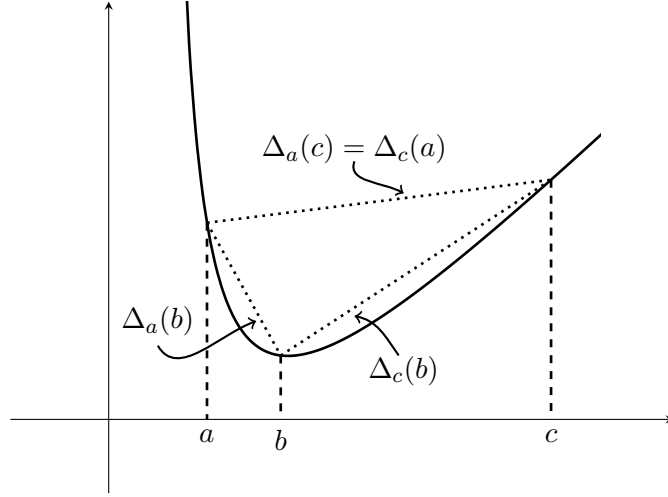


FIGURE 1 – Pentés des différents segments reliant $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ et $(c, f(c))$

13. a. Théorème de la limite monotone.

- i. L'ensemble $\{\varphi(x); x \in]a; b[\}$ est une partie non vide ($a < b$) et majorée (φ est majorée) de $\mathbb{R}$. On pose donc $\ell = \sup\{\varphi(x); x \in]a; b[\}$. Montrons que l'on a

$$\varphi(x) \xrightarrow[x < b]{x \rightarrow b} \ell.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{\varphi(x); x \in]a; b[\}$. En particulier, il existe $x_0 \in]a; b[$ tel que $\ell - \varepsilon < \varphi(x_0) \leq \ell$. Par croissance de la fonction φ , pour tout $x \in [x_0; b[$, on a

$$\ell - \varepsilon < \varphi(x_0) \leq \varphi(x) \leq \ell$$

ou encore $|\varphi(x) - \ell| < \varepsilon$. Ainsi, en posant $\eta = b - x_0 > 0$, on a, pour tout $x \in]a; b[$,

$$|x - b| < \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \ell| < \varepsilon.$$

C'est le résultat voulu.

- ii. Si φ est minorée, alors φ admet une limite finie à droite en a , égale à la borne inférieure de l'ensemble $\{\varphi(x); x \in]a; b[\}$.
- b. i. D'après la question 11, la fonction Δ_b est croissante sur $[a; c] \setminus \{b\}$. En particulier, pour tout $x \in [a; b[$, on a $\Delta_b(x) \leq \Delta_b(c)$. Ainsi, la fonction Δ_b est croissante et majorée sur $[a; b[$. Par le théorème de la limite monotone, on en déduit que le taux d'accroissement $\Delta_b(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ admet une limite lorsque x tend vers b par valeurs inférieures. Autrement dit, la fonction f est dérivable à gauche en b ; on note $f'_g(b)$ le nombre dérivé correspondant.

Par un raisonnement similaire, on montre que f est dérivable à droite en b et on note $f'_d(b)$ le nombre dérivé correspondant.

Enfin, par croissance de la fonction Δ_b sur $I \setminus \{b\}$, pour tout $x \in [a; b[$ et pour tout $y \in]b; c]$, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \Delta_b(a) \leq \Delta_b(x) \leq \Delta_b(y) \leq \Delta_b(c) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Par passage à la limite $x \xrightarrow[x < b]{} b$ puis $y \xrightarrow[y > b]{} b$, on en déduit les inégalités :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

ii. Pour tout $x \in [a; c] \setminus \{b\}$, on a

$$f(x) - f(b) = \Delta_b(x)(x - b).$$

En passant à la limite $x \xrightarrow{x < b} b$ dans cette égalité, il vient

$$f(x) - f(b) \xrightarrow[x < b]{x \rightarrow b} f'_g(b) \cdot 0 = 0$$

et on vérifie de même que $f(x) \xrightarrow[x > b]{x \rightarrow b} f(b)$. D'où le résultat.

c. La fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0; 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est convexe et non continue.

IV. Caractérisation des fonctions convexes dérivables

14. a. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq b$, $x \neq a$ et $y \geq a$, $y \neq b$. D'après la question 11, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \Delta_a(x) \leq \Delta_a(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \Delta_b(a) \leq \Delta_b(y) = \frac{f(b) - f(y)}{b - y}.$$

Par passage à la limite $x \xrightarrow[x \neq a]{x \leq b} a$ et $y \xrightarrow[y \neq b]{y \geq a} b$ dans ces inégalités, on en déduit

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

et le fait que f' est croissante sur I .

b. On doit montrer que pour tout $(x_0, x) \in I^2$, on a

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Pour $x = x_0$, le résultat est immédiat et si $x \neq x_0$, c'est équivalent à

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0) \quad \text{si } x < x_0$$

et

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{si } x_0 < x.$$

Or, ces inégalités sont vérifiées d'après la question précédente.

15. a. La fonction ϕ est dérivable sur $[0; 1]$ comme composée de fonctions dérivables sur $[0; 1]$. Soit $t \in [0; 1]$. On a :

$$\phi'(t) = f(x) - f(y) - (x - y)f'(tx + (1 - t)y). \quad (4)$$

b. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f entre x et y , il existe un réel $\theta \in]x; y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(\theta)(y - x).$$

D'après la question 6.a, on écrit $\theta = \gamma x + (1 - \gamma)y$ avec $\gamma \in]0; 1[$. Ainsi, d'après la relation (4), on a, pour tout $t \in [0; 1]$:

$$\phi'(t) = (x - y)(f'(\gamma x + (1 - \gamma)y) - f'(tx + (1 - t)y)). \quad (5)$$

- c. La fonction $t \mapsto f'(tx + (1-t)y)$ est décroissante comme composée d'une fonction décroissante avec une fonction croissante. Donc, d'après l'expression (5), la fonction ϕ' est positive sur $[0; \gamma]$ et négative sur $[\gamma; 1]$. Ainsi, la fonction ϕ est croissante sur $[0; \gamma]$ et décroissante sur $[\gamma; 1]$.
- d. Comme $\phi(0) = \phi(1) = 0$, on en déduit que ϕ est positive sur $[0; 1]$. Autrement dit, pour tout $t \in [0; 1]$, on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Cette inégalité étant valable quels que soient $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $t \in [0; 1]$, on en déduit comme à la question 8.c.v que f est convexe.

16. On suppose que f est deux fois dérivable sur I . D'après ce qui précède, f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I , ou encore si et seulement si f'' est positive sur I .

V. Différentes inégalités

17. a. Soit $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$. On a :

$$\begin{aligned} \psi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2) &= y_1 f\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2 f\left(\frac{x_2}{y_2}\right) \\ &= (y_1 + y_2) \left(\frac{y_1}{y_1 + y_2} f\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{y_2}{y_1 + y_2} f\left(\frac{x_2}{y_2}\right) \right) \\ &\leq (y_1 + y_2) f\left(\frac{y_1}{y_1 + y_2} \frac{x_1}{y_1} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} \frac{x_2}{y_2} \right) \quad \text{car } f \text{ est concave} \\ &\leq (y_1 + y_2) f\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \right) \\ &\leq \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2). \end{aligned}$$

- b. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ c'est immédiat et pour $n = 2$ c'est le résultat de la question précédente.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2(n+1)}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \psi(x_k, y_k) &= \sum_{k=1}^n \psi(x_k, y_k) + \psi(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ &\leq \psi\left(\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n y_k\right) + \psi(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \psi\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \quad \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

18. Application.

- a. On a $f''(t) = -\frac{1}{pq} \frac{1}{t^{\frac{1}{q}+1}} \leq 0$. Ainsi la fonction $-f$ est convexe d'après la question 16 et donc f est concave.
- b. Avec les notations de la question 17 appliquée à la fonction f considérée, on a :

$$\psi(x, y) = y f\left(\frac{x}{y}\right) = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}}$$

pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n \psi(a_k^p, b_k^q) \\ &\leq \psi\left(\sum_{k=1}^n a_k^p, \sum_{k=1}^n b_k^q\right) \quad \text{d'après la question 17.b} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré l'inégalité de Hölder.