4.1 Première épreuve écrite

Le sujet de la première épreuve écrite portait sur le problème du collectionneur. Les premières parties, indépendantes les unes des autres, démontraient des résultats ensuite réinvestis pour aboutir à une estimation du nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'intégralité de la collection.
La partie A portait sur les sommes harmoniques et l'existence de la constante d'Euler. La partie B portait sur le problème de Bâle, traité en utilisant le noyau de Dirichlet. Dans la partie C, les lois géométriques, leur espérance et leur variance étaient étudiés. Dans la partie D, il était demandé de démontrer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev et le problème du collectionneur était enfin abordé dans la dernière partie.

Beaucoup de candidats ont abordé bon nombre de questions et sont arrivés assez loin dans le sujet.

Partie A

Question I. Il s'agissait d'un très classique encadrement. Cette question a été globalement bien traitée. Toutefois, un certain nombre de candidats se sont contentés d'un graphique, parfois sans justification ni explication sur les aires considérées, alors qu'une démonstration en bonne et due forme était attendue. De plus, de nombreux candidats utilisent dans l'inéquation la règle de passage à l'inverse sans justifier la position des quantités par rapport à 0, voire affirment que la fonction inverse est décroissante sur **R***. Enfin, quelques candidats ont tenté très maladroitement une démonstration par récurrence.

Question II. La sommation demandée nécessitait de traiter à part le cas n=1, ce qui a été noté par peu de candidats. Certains ont toutefois raisonné par récurrence ce qui permet de ne pas oublier ce cas.
Un certain nombre de candidats n'hésitent pas à considérer l'intégrale de 0 à 1 de l'intégrale de la fonction inverse ou même à écrire ln(0) sans que cela ne leur pose de problème.

Question III.1. La question est globalement bien traitée, bien que le théorème de comparaison utilisé ici ne soit quasiment jamais cité. On trouve dans de nombreuses copies un raisonnement par encadrement alors qu'il suffisait d'une minoration.

Question III. 2. Un certain nombre de candidats ont oublié de mentionner que ln(n) est strictement positif lorsque n>2 avant de diviser dans l'inégalité de la question II. La limite du quotient ln(n+1)/ln(n) a mis en difficulté nombre de candidats : beaucoup ont admis que les suites (ln(n+1)) et (ln(n)) sont équivalentes sans aucune justification. Toutefois, certains ont judicieusement observé que ln(n+1)/ln(n)>1, ce qui suffisait pour conclure sans avoir à calculer la limite de ce quotient.

Question IV. 1. La plupart des candidats connaissent la définition de suites adjacentes, bien que certains ajoutent l'hypothèse $v_n > u_n$, ou substituent cette hypothèse au fait que (u_n-v_n) tende vers 0.
L'étude de la monotonie des deux suites n'a pas toujours été réussie et le signe de la différences de deux termes consécutifs est parfois donné sans aucune justification ou avec une utilisation (vouée à l'échec) de développements limités. Plusieurs candidats ont prouvé astucieusement la monotonie à l'aide de l'encadrement de la question I, sans utiliser directement la concavité du logarithme népérien.

Question IV. 2. Certains ne connaissent pas le théorème des suites adjacentes et démontrent la convergence des deux suites vers une limite commune, en oubliant parfois de montrer l'existence des limites. De nombreux candidats ont par ailleurs oublié de prouver que gamma était positif.

Question V. 1. Si la première inégalité est souvent bien justifiée, c'est moins le cas pour la seconde. Peu de candidats pensant à utiliser les questions déjà traitées.

Question V. 2. Cette question a été peu traitée mais peu réussie. Les programmes proposés fonctionnent rarement, avec des erreurs sur le test d'arrêt de la boucle while. Beaucoup de candidats n'ont pas utilisé l'encadrement de la question V.1 et ont souvent uniquement calculé le terme H_n. On dénombre aussi de nombreuses erreurs de syntaxe Python.

Partie B

Dans cette partie, les questions IX.1 à IX.3, bien que très souvent abordées, l'ont rarement été de façon satisfaisante. Les calculs de limites impliqués dans ces questions ont posé de graves problèmes aux candidats, ainsi que la notion de fonction de classe C^1. Certains candidats ont souhaité utiliser des équivalents pour certains calculs de limites, très souvent à mauvais escient, en les additionnant sans aucune précaution. D'autres ont utilisé des développements limités (ce qui pouvait mener à la bonne réponse) de façon mal maîtrisée : le reste peut changer d'ordre d'une ligne à l'autre, ou disparaitre ou n'être jamais mentionné.

Question VI. La question est globalement bien traitée, bien que là encore le fait que la fonction inverse est décroissante est peu mentionné. Certains candidats ont tenté une preuve par une récurrence, souvent mal rédigée, et qui n'utilise pas l'hypothèse de récurrence.

Question VII. Cette question a mis en évidence les lacunes des candidats au sujet des séries : les théorèmes pouvant être utilisés ici ne sont pas maîtrisés et il y a parfois confusion entre les théorèmes sur les suites et ceux sur les séries. Dans de nombreuses copies, le résultat est intuitivement là mais les candidats parlent régulièrement des limites avant même de montrer que la suite (B_n) converge. Certains considèrent que 2-1/n est un majorant de la suite (B_n), sans voir que cela dépend de l'entier n. Rappelons qu'une suite bornée n'est pas nécessairement convergente et qu'une suite majorée par 2 ne converge pas nécessairement vers 2.

Question VIII. 1. On relève quelques confusions entre les formules de Moivre et d'Euler. Quelque fois, lorsque le sigma est scindé en deux, le cas k=0 est comptabilisé dans les deux sous-sommes.

Question VIII. 2. Cette question a été peu traitée et peu réussie. Il semble que la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ne démarrant pas à 0 n'est pas bien maîtrisée ; aussi certains candidats « cassent » la somme en deux pour faire apparaitre des sommes de termes consécutifs de suites géométriques de premier terme 1 et commençant à 0. Le fait que la raison soit différente de 1 afin d'appliquer la formule bien connue est fréquemment oublié.

Question VIII. 3. Cette question a été plutôt réussie. Plusieurs candidats utilisent la question précédente puis passent à la limite, ou remplacent t par 0 dans cette formule sans plus de justification. D'autres utilisent la définition de $D_n(0)$ donnée dans l'énoncé mais se trompent lorsqu'il s'agit d'évaluer la somme des 1 pour k allant de 1 à n : certains indiquent n(n+1)/2, d'autres 1, d'autres enfin donnent n-1, ou 1. D'autres se trompent dans la valeur de cos(0).

Question IX. 1. La plupart des candidats ayant abordé cette question pensent à séparer la continuité en 0 et la continuité en dehors de 0. La continuité de f sur l'intervalle]0; π/2] n'est pas toujours justifiée (aucune mention du fait que le dénominateur ne s'annule pas, utilisation du mot "composée" à mauvais escient). Certains ont calculé la limite de t/sin(t) en 0 mais oublié de mentionner que cette limite était égale à f(0) pour justifier la continuité de f en 0.

Question IX. 2. De nombreux candidats pensent à la limite du taux d'accroissement en 0 mais n'arrivent pas à la calculer. Quelques candidats se sont essayés à l'utilisation de développements limités de façon peu maîtrisée : les restent disparaissent ou changent d'ordre d'une ligne à l'autre, par exemple. D'autres ont tenté des démonstrations (fausses) avec des équivalents, en déduisant du fait que sin(t) est équivalent à t en 0 que la limite de 1/sin(t)-1/t vaut 0 en 0. Il était bien sûr possible d'utiliser le théorème de prolongement de la dérivée en 0 (ce qui permettait d'obtenir aussi la question IX.3), ce que certains candidats ont fait sans toujours citer ce théorème. Notons enfin que les correcteurs ont pu lire à plusieurs reprises l'argument suivant : comme f(0) est constante, f est dérivable en 0 et f'(0)=0.

Question IX. 3. La définition de fonction de classe C^1 semble mal connue et la continuité de la dérivée est souvent oubliée. Peu de candidats sont parvenus à montrer la continuité de f' en 0, en dehors de quelques-uns maîtrisant les développements limités.

Question X. 1. D'une manière générale, les candidats sont globalement à l'aise sur les intégrations par parties, en dehors des classiques erreurs de signe. Cependant, la rédaction n'est pas toujours satisfaisante : les fonctions utilisées ne sont pas explicitées, ce qui rend délicat la compréhension des calculs et le fait qu'elles soient de classe C^1 est très peu mentionné. On trouve dans quelques copies des expressions sin(k π) non réduites, sauf à la fin du calcul, ce qui alourdit considérablement la rédaction.

Question X. 2. La question est plutôt bien réussie par les candidats l'ayant abordée. Certaines rédactions montrent néanmoins que la linéarité de l'intégrale usuelle n'est pas toujours maîtrisée : on lit des arguments du type théorème de convergence dominée pour justifier la linéarité, ou encore certains candidats disent l'admettre car ne savent pas la justifier. Certains candidats ne jugent pas utile de proposer des étapes intermédiaires, peut-être parce que cela leur a semblé évident.

Question X. 3. Cette question simple a le plus souvent été réussie. Quelques candidats n'ont pas jugé utile de simplifier leur résultat et répondu $2\pi^2/6$.

Question X. 4. Plusieurs candidats font des erreurs de signe mais prétendent obtenir le résultat.

Question X. 5. Les candidats ont pensé naturellement au changement de variables x = t/2, certains prennent le temps de justifier que c'est un changement de variable légitime. Dans les intégrales, le dt est parfois oublié ce qui ne facilite pas la mise en lumière du changement de variable.

Question XI. La fonction donnée est souvent définie sur tout l'intervalle par g(t)=t(2-2t/π)/sin(t) sans évoquer la valeur en 0 et le fait que g soit de classe C^1 n'est pas toujours précisé. La question IX est citée en référence mais la fonction n'est pas clairement définie comme le produit de f par la fonction polynomiale adéquate.

Question XII. L'intégration par parties n'est pas toujours bien menée et il est rare de voir l'argument "g est de classe C^1", pourtant essentiel ici, apparaître. Lors du calcul de la limite, peu de candidats ont rigoureusement utlisé l'inégalité triangulaire et le théorème d'encadrement pour conclure. On note quelques tentatives (peu ou mal justifiées) de mise en œuvre du théorème interversion limite/intégrale par un argument de convergence uniforme ou du théorème de domination.

Question XIII. Cette question de conclusion a souvent été réussie. On peut noter qu'elle a été régulièrement abordée par des candidats qui n'ont pas réussi les questions précédentes.

Partie C

Il est à noter que le début de cette partie avait été posé dans le sujet de 2019.
Les lacunes sur les séries qui ont pu être repérées en 2019 sont de nouveau mis en évidence.

Question XIV. On note des confusions fréquentes entre la série, sa somme et les sommes partielles. La règle de d'Alembert est peu souvent utilisée pour conclure quant à la nature de la série.

Question XV. Cette question a été très peu réussie et a montré les lacunes des candidats sur les séries. Parmi ceux ayant tenté une démonstration en dérivant la série, peu sont parvenus à le faire correctement. Les résultats sur les séries entières semblent peu connus. Certains candidats dérivent la série terme à terme sans aucune précaution, voire en affirmant qu'une série dont le terme général est dérivable est toujours dérivable ou en annonçant qu'il s'agit de fonctions polynomiales.

Question XVI. La positivité des p_k et la convergence de la série de terme général p_k sont souvent oubliées.

Question XVII. La convergence absolue des séries considérées est très rarement mentionnée et lorsqu'elle l'est, celle-ci n'est pas maitrisée (on s'intéresse à la valeur absolue de la série au lieu de la série des valeurs absolues). Les candidats font souvent le lien avec la question XV pour déterminer la variance. Les calculs sont parfois laborieux mais aboutissent souvent. La formule de Huygens est quelquefois donnée fausse ou redémontrée.

Question XVIII 1. La linéarité de l'espérance est souvent connue des candidats, bien que certains justifient leurs calculs par la mutuelle indépendance.

Question XVIII 2. Cette question est moins bien traitée que la précédente et notamment l'argument d'indépendance mutuelle est souvent passé sus silence. Certains candidats se perdent dans des calculs laborieux en voulant introduire la formule de Huygens.

Partie D

Cette partie comportait deux questions de cours, la démonstration des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebichev. Ces deux inégalités avaient déjà fait l'objet de questions en 2019, lors de la seconde épreuve écrite. Cette partie a été assez peu abordée par les candidats et parmi ceux l'ayant traitée, peu l'ont fait correctement.

Question XIX. Les preuves proposées par les candidats manquent en général de rigueur : peu signalent que Y_1 et Y_2 forment une partition de l'univers-image, d'autres les traitent comme des variables aléatoires et non comme des parties de **R**. Quelques candidats semblent connaître la preuve de ce résultat mais enchaînent les inégalités sans aucune justification : le fait que Y est positive et que a>0 doivent doit intervenir dans la démonstration. Quelques candidats ont rédigé une preuve correcte pour des variables aléatoires à densité, ce qui était accepté. On note également quelques rédactions utilisant des indicatrices, le plus souvent mal maîtrisées.

Question XX. Peu de candidats vérifient qu'ils peuvent utiliser l'inégalité de Markov, notamment l'hypothèse de positivité. Certains candidats disent appliquer l'inégalité de Markov à |X-E(X)|

Partie E

En dehors des premières questions, cette partie a été assez peu abordée.

Question XXI. Cette question est régulièrement abordée et réussie. On trouve souvent T_k au lieu de T_n.

Question XXII. L'univers-image (qui est demandé lorsque l'on détermine la loi d'une variable aléatoire) est rarement évoqué.

Question XXIII. 1. Le résultat est souvent trouvé mais avec des justifications peu précises. Pa exemple, les probabilités sont multipliées sans justification de l'indépendance des évènements et l'écriture de l'événement à l'aide d'une réunion incompatible d'intersection d'événements indépendants est très rare.

Question XXIII. 2. La plupart des candidats ayant abordé cette question ont compris le lien avec la question précédente, mais l'égalité des deux événements n'est pas toujours bien écrite, on trouve souvent une seule des deux inclusions.

Question XXIII. 3. Comme pour la question XXII, l'univers image n'est quasiment jamais donné. Peu de candidats font le lien avec la question précédente et certains prouvent directement ce résultat. Dans plusieurs copies, certains candidats parlent de loi géométrique sans remarquer que l'univers image ne convient pas.

Question XXIII 4. Quelques candidats résolvent une équation à la place d'une inéquation ou commencent par une inéquation qui se transforme en équation, d'autres annoncent q=1 sans prendre de recul.

Question XXIII. 5. La réponse est en général bien rédigée et expliquée.

Les questions suivantes ayant été peu abordées, il est difficile d'en tirer des remarques pertinentes.
Parmi elles, la question XXIII. 9 a été abordée et réussie par un peu plus de candidats que les autres (nombre d'entre eux n'ont traité que cette question dans la partie E).

Le diagramme suivant décrit la réussite des candidats aux différentes questions de ce sujet.