4.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet de la seconde épreuve est composé de deux problèmes indépendants.

Le premier problème porte sur différents types de moyennes : la première partie consiste en la résolution de 7 problèmes issus des programmes de l'enseignement secondaire, dans lesquels apparaissent les quatre types de moyennes introduits dans l'énoncé. La seconde partie propose l'élaboration d'une figure géométrique sur laquelle ces quatre moyennes apparaissent. Les troisièmes et quatrièmes parties généralisent les résultats obtenus à d'autres types de moyenne et enfin la dernière partie traite de la notion de moyenne en probabilités, avec notamment la preuve de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.
Le second problème, plus court, traite des liens entre le pentagone régulier et le nombre d'or, qui est développé sous forme de fraction continue dans la seconde partie.

Conformément à la description générique de l'épreuve, ce sujet a permis d'apprécier, outre les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à se placer dans une optique professionnelle. En particulier, les sept problèmes qui ouvraient le sujet permettait, d'une part de vérifier que le candidat était capable de les résoudre (ce qui n'a pas toujours été le cas comme on le verra plus bas), d'autre part de rédiger une résolution précise, concise et rigoureuse, telle qu'attendue d'un futur enseignant. D'une manière générale, cette épreuve a été peu réussie, en raison, d'une part d'une maîtrise insuffisante des connaissances et des compétences mathématiques nécessaires à la résolution du problème, d'autre part d'un manque de rigueur, de clarté et de précision dans les justifications attendues.

4.2.a Qualité de l'argumentation et de l'expression écrite

D'une manière générale, rappelons qu'il est attendu des candidats une rédaction « experte » et non pas telle qu'un élève pourrait la formuler sur une copie : il s'agit bien de sélectionner de futurs enseignants et non pas de seulement vérifier que les candidats sont capables de résoudre les exercices proposés. À ce titre, il est attendu des candidats :

- Que, lorsqu'un théorème est cité, toutes ses hypothèses soient vérifiées. Par exemple, pour la question X.1 du premier problème, il était attendu que les candidats justifient l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires par la continuité de la fonction f ; pour les diverses utilisations du théorème de Thalès, il était attendu que les candidats en vérifient les hypothèses (en particulier les hypothèses d'alignement des points, peu vérifiées) et ne se contentent pas d'écrire « d'après le théorème de Thalès », « on applique Thalès », voire simplement « Thalès : ».

- Que les quantificateurs soient utilisés correctement et à bon escient, en particulier dans la rédaction des preuves par récurrence.

- Que les notations soient respectées : par exemple, en géométrie, les notations [AB], (AB) et AB sont souvent utilisées indistinctement, ce qui a conduit à des erreurs mathématiques graves, telles que l'apparition de quotients de segments.

- Qu'une réelle attention soit portée à la grammaire et l'orthographe : on déplore un nombre relativement important de copies truffées de fautes d'orthographe allant jusqu'à rendre la compréhension difficile (« on mais au carré »), sans compter la présence d'expressions incorrectes (« on a que »).

- Que la rédaction soit lisible et soignée : rappelons que la notation porte aussi sur cet aspect. À ce titre, mettre en valeur les résultats démontrés, accompagner de figures illustratives les questions le nécessitant (en particulier en géométrie), réaliser des figures soignées devraient être la norme. La précision et la concision sont également attendues.

Certains candidats usent d'expressions telles que « il est clair que » ou « on peut affirmer que » et même parfois, « c'est évident », tout particulièrement en géométrie, sans plus d'argumentation. De telles affirmations ne suffisent pas pour convaincre les correcteurs de la validité des réponses proposées et laissent planer le doute sur l'honnêteté intellectuelle du candidat.

4.2.b Structuration et présentation des copies

Si la plupart des copies sont lisiblement et correctement rédigées, faisant par exemple ressortir les résultats obtenus en les encadrant, d'autres auraient mérité davantage d'effort au niveau du soin et de la présentation : les traits doivent être tirés à la règle et les illustrations (courbes, schémas) doivent être soignées et précises (en particulier, les noms des axes doivent apparaître). Comme pour la première épreuve, en l'absence d'épreuves orales à la session 2020, le jury s'est montré particulièrement attentif à la qualité de présentation des copies. L'absence de structuration de la copie, les erreurs de numérotation dans les pages qui la constituent ou dans les différentes questions traitées, le désordre dans lequel les questions sont traitées augurent mal de la capacité future du candidat à concevoir des documents pédagogiques de référence et à organiser efficacement un tableau.

Le sujet comportait plusieurs figures géométriques à réaliser, en particulier dans la partie B du premier problème. Elles sont en général soignées et bien annotées, mais parfois de trop petite taille. On peut toutefois s'étonner du nombre de candidats qui passent ces épreuves écrites sans disposer d'un compas et le signalent sur leur copie. Le recours à différentes couleurs est un plus lorsque celles-ci sont utilisées à bon escient. A contrario, les différents diagrammes demandés (question X.2 du premier problème, question IV.4 du second problème) ont souvent été peu satisfaisants : axes non gradués ou échelle non pertinente, tracé des fonctions trop approximatif…

4.2.c Contenu mathématique

Beaucoup de copies comportent des erreurs de logique grossières : confusion entre condition nécessaire et suffisante, abus des signes d'implication et d'équivalence, ou raisonnements circulaires : on admet ce que l'on souhaite montrer, puis on le redémontre. La rédaction des raisonnements par récurrence est également souvent déficiente : il faut souvent se contenter de vagues « initialisation » et « hérédité » (voire de « *n* implique *n+1* ») et l'hypothèse de récurrence est rarement écrite. De plus, on trouve parfois « supposons l'hypothèse de récurrence pour tout *n* et montrons le pour tout *n+1* ». Ces problèmes de rédaction des récurrences sont signalés dans les rapports du jury depuis de nombreuses années.

Passons maintenant en revue certaines questions de façon plus précise.

Premier problème

Question I. Cette question a été abordée par 98,6 % des candidats et parmi eux seulement 16,9 % y ont répondu de façon correcte. Rappelons qu'il était attendu une rédaction experte et qu'on ne pouvait se contenter de calculer la moyenne arithmétique de 9 et de 20 : un minimum de justification était attendu, soit par une suite d'inégalités, soit en utilisant les variations d'une fonction affine par exemple. Certains candidats ont calculé les quatre moyennes (arithmétique, géométrique, quadratique, harmonique) de 9 et de 20 (sans justifier d'ailleurs pourquoi la seconde note devait être 20) et ont choisi la plus grande.

Question II.1. Cette question a été abordée par 91,2 % des candidats et parmi eux seulement 12,3 % y ont répondu de façon correcte. Il semble que la notion de taux d'évolution soit mal maîtrisée par de nombreux candidats dont beaucoup ont calculé la moyenne arithmétique des deux taux ou des deux coefficients multiplicateurs.

Question III.1. Cette question a été abordée par 89,5 % des candidats et parmi eux 46,9 % y ont répondu de façon correcte. Ce problème a été nettement mieux réussi que le précédent. Cependant, certains candidats ignorent la formule donnant le volume d'un cylindre et on a pu trouver quelques réponses aberrantes, telles que R=1700 cm.

Question IV.1. Cette question a été abordée par 92,8 % des candidats et parmi eux seulement 35,6 % y ont répondu de façon correcte. Beaucoup de candidats se contentent de calculer la moyenne arithmétique des deux vitesses moyennes. D'autres ont affirmé qu'il n'était pas possible de résoudre le problème, la distance parcourue n'étant pas donnée : en conséquence, ils ont raisonné sur une valeur particulière de cette distance, par exemple 10 km. Outre le problème logique de généralisation abusive d'un exemple au cas général, cela reflète une maîtrise insuffisante du calcul littéral.

Question V.1. Cette question a été abordée par 92,5 % des candidats et parmi eux 66,7 % y ont répondu de façon correcte. Certains candidats n'ont pas su éliminer l et l' dans les égalités découlant de la loi d'Archimède et ont essayé de s'en sortir à l'aide de moyennes pondérées, sans aboutir.

Questions VI.1 et VI.2. Ces questions ont été respectivement abordées par 91,3 % et 81,9 % des candidats, et parmi eux 64,6 % et 72,2 % y ayant répondu de manière correcte. Ce problème a été globalement l'un des plus réussi par les candidats, avec tout de même un bémol déjà signalé sur l'absence de vérification des hypothèses du théorème de Thalès.

Question VII.1. Cette question a été abordée par 76,3 % des candidats et parmi eux 72,7 % y ont répondu de façon correcte.

Question IX.6. Certains candidats ont démontré algébriquement les inégalités demandées, cela a été apprécié.

Question X.1. Les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires ont rarement été vérifiées, en particulier le fait que la moyenne arithmétique de $F(a)$ et $F(b)$ est bien une valeur intermédiaire. De plus, il s'agit d'une des questions comportant plusieurs items et beaucoup de candidats n'ont pas pensé à tous les vérifier : ainsi, dans la seconde partie de cette question, il fallait vérifier que les quatre fonctions soient bien continues et strictement monotones, ce qui n'a pas toujours été fait.

Question XI.1. Dans cette question, la gestion des indices a très souvent laissé à désirer, en particulier dans la somme double. Beaucoup de candidats ont peu justifié les étapes du calcul dans la partie hérédité de la preuve par récurrence, ce qui a parfois pu être perçu comme une tentative d'escroquerie. Cette question a été abordée par 72,8 % des candidats et parmi eux, seulement 16,8 % l'ont réussie.

Questions XVI.1 et XVI.2. Ces deux questions de cours ont été abordées respectivement par 27,3 % et 25,1 % des candidats et, parmi eux, respectivement 30,7 % et 36,7 % l'ont réussie.

Question XVII.5. Cette question a été très peu abordée par les candidats et la plupart du temps de façon très superficielle. Dans les rares copies où cette question est abordée, l'erreur du Chevalier est trouvée mais il n'y aucune piste pour l'utilisation de ce texte en classe. Les candidats ne font pas le lien entre ce texte et leurs réponses aux questions précédentes, montrant un manque de recul et aussi de maîtrise de ces sujets. Ils ne voient pas l'opportunité de présenter aux élèves une problématique qui permet de relier l'histoire aux mathématiques et les mathématiques à des besoins de l'activité humaine, même si celle-ci est le jeu.

Second problème

Le second problème a souvent été mal compris par les candidats : il s'agissait de démontrer des résultats classiques sur le pentagone régulier (égalités d'angles et de longueur) en se basant sur la définition à l'aide d'une rotation donnée au début de la partie A. Par exemple, pour la question I.1.a, de nombreux candidats se sont contentés d'affirmer qu'il s'agissait de la définition d'un pentagone régulier, sans s'appuyer sur la définition donnée dans l'énoncé. Bien comprendre les questions posées et faire preuve d'un minimum de recul est tout simplement fondamental pour réussir l'épreuve.

Il était bien sûr possible d'utiliser la structure de groupes des isométries du plan, mais à condition d'utiliser la bonne loi, alors que l'addition de rotations apparaît dans plusieurs copies. Il était également possible d'utiliser les nombres complexes pour traiter une partie du problème, à condition de préciser le repère orthonormé direct choisi et de signaler qu'on travaille avec les affixes des points. Bien trop souvent, l'utilisation des nombres complexes s'est soldée par la multiplication d'un nombre complexe et d'un point du plan.

D'une manière générale, ce second problème a mis en évidence le manque de maîtrise des candidats en géométrie : la confusion entre le segment [AB] et la longueur AB apparaît dans de nombreuses copies, les démonstrations faisant intervenir des angles sont en général menées sans grand soin, les hypothèses d'application de théorèmes classiques, tel le théorème de Thalès sont rarement vérifiées, le vocabulaire est imprécis (« B est la rotation de centre O de A », « le triangle MOG est perpendiculaire en O », « H est la hauteur issue de M », « angle rectangle »). Notons aussi qu'un certain nombre de candidats semblent en difficulté avec les radians et expriment les angles en degrés ou oscillent entre radians et degrés dans la question II.1.

Question II.5. Cette question a été abordée par 20,3 % des candidats et parmi eux, 5,3 % seulement l'ont réussie. Très peu de candidats ont abordé cette question en ayant en tête la consigne « tels que vous les feriez figurer dans la trace écrite d'un élève du cycle 4 ». Il faut souvent se contenter d'un « si », et non d'un « si et seulement si », laissant planer le doute de savoir si les conditions énoncées sont nécessaires, suffisantes ou nécessaires et suffisantes. Peu de copies donnent une illustration des trois cas à l'aide de figures. Enfin, quelques candidats confondent triangles isométriques et triangles semblables, en énonçant l'égalité des angles comme condition d'égalité.

Question III.3. Cette question a été abordée par 22,6 % des candidats et parmi eux, 9,1 % l'ont réussie. Peu de candidats réussissent à montrer que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel, alors que la preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ est l'une des treize démonstrations exigibles en classe de seconde.

Question IV.4. Cette question a été abordée par 36,6 % des candidats et parmi eux, 7,3 % l'ont réussie. Il s'agit pourtant d'une construction très classique des termes d'une suite définie par récurrence (« diagramme en escargot »).

Question V.3. Rappelons que si u est une suite croissante majorée par un nombre réel M, alors u est convergente, mais pas nécessairement vers M. Cette erreur est signalée dans un nombre relativement important de copies.

La réussite aux épreuves écrites suppose que les candidats soient préparés à :

• maîtriser et énoncer avec précision, lorsqu'elles sont utilisées, les connaissances mathématiques de base, indispensables à la prise de recul sur les notions enseignées ;

• rédiger clairement et de manière rigoureuse une démonstration simple, qui sera une composante essentielle du métier de professeur de mathématiques ;

• exposer avec toute la précision voulue, en mentionnant clairement les étapes successives, les raisonnements, plus particulièrement ceux qui relèvent du collège ou du lycée.

On rappelle aussi l'importance du respect des notations, de la nécessité de conclure une argumentation, mais aussi l'intérêt de la lisibilité d'une copie.