Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Ce problème propose d'étudier différentes moyennes de nombres positifs.

Notations
$\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Partie A : cas de deux nombres

Dans cette partie, on donne les définitions de différentes moyennes de deux nombres positifs et on présente différentes situations internes ou externes aux mathématiques les faisant intervenir.

Définitions
Étant donnés deux nombres réels a et b positifs, on appelle :

- *moyenne arithmétique* de a et b le nombre m défini par $m = \dfrac{a+b}{2}$.
- *moyenne quadratique* de a et b le nombre q défini par $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.
- *moyenne géométrique* de a et b le nombre g défini par $g = \sqrt{ab}$.

Lorsque a et b sont strictement positifs, on appelle :

- *moyenne harmonique* de a et b le nombre h défini par $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

I. Problème 1 : moyenne des notes

Lors d'un premier contrôle, un élève a obtenu la note de 9 sur 20. Un deuxième contrôle est prévu, avec le même coefficient que le premier.
Quelle est la valeur maximale de la moyenne que cet élève peut obtenir sur ces deux notes ?

Soit x la note obtenue par l'élève au deuxième test. La moyenne m des deux notes est donnée par

$$m = \frac{9+x}{2}.$$

Comme $x \leqslant 20$, il vient $x + 9 \leqslant 29$; donc $m \leqslant \dfrac{29}{2}$. L'élève peut obtenir au maximum une moyenne de 14,5 sur 20.

II. Problème 2 : évolutions en pourcentage

Entre octobre 2018 et novembre 2018, le prix baril de pétrole brut de la mer du Nord a connu une baisse de 19%.
Entre novembre 2018 et décembre 2018, il a connu une nouvelle baisse de 12%.
Entre décembre 2018 et janvier 2019, il a connu une hausse de 4%.

1. Calculer le taux d'évolution mensuel moyen entre octobre 2018 et décembre 2018, puis entre novembre 2018 et janvier 2019.

Notons t_1 et t_2 les deux taux d'évolution successifs respectivement entre deux mois consécutifs. Le taux d'évolution moyen t entre le premier et le troisième mois vérifie

$$(1+t)^2 = (1+t_1)(1+t_2).$$

Entre octobre 2018 et décembre 2018, il s'agit de deux baisses successives chacune inférieure à 100% : $t_1 = -0,19$ et $t_2 = -0,12$; ainsi,

$$(1+t)^2 = 0,81 \times 0,88 = 0,7128.$$

le taux d'évolution moyen est supérieur à -1 donc

$$\begin{aligned} t &= -1 + \sqrt{(1+t_1)(1+t_2)} \\ &= -1 + \sqrt{0,7128} \\ &\approx -0,156. \end{aligned}$$

Le taux moyen de diminution entre octobre et décembre est d'environ 16%. Entre novembre 2018 et janvier 2019, il s'agit d'une baisse inférieure à 100% suivie d'une hausse, donc $t \geqslant -1$. Ainsi, $t = -1+\sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}$; donc, puisque $t_1 = -0,12$ et $t_2 = +0,04$,

$$t = -1 + \sqrt{0,9152} \approx -0,04.$$

Le taux moyen de diminution entre novembre 2018 et janvier 2019 est d'environ 4%.

2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

Ce calcul met en jeu la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs associés aux taux d'évolutions successifs.

III. Problème 3 : fonte de deux plaques

On dispose de deux plaques métalliques de formes cylindriques, de même épaisseur $e = 20$ cm, mais de rayons différents $R_1 = 30$ cm et $R_2 = 50$ cm. On décide de fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres, de même épaisseur e et de même rayon R.

1. Calculer R.

Le volume de chacune de ces deux plaques identiques est égal à $\pi R^2 e$ et la somme des volumes de ces deux plaques est égale à $\pi R_1^2 e + \pi R_2^2 e$. Ainsi,

$$\pi R_1^2 e + \pi R_1^2 e = 2\pi R^2 e,$$

donc $R_1^2 + R_2^2 = 2R^2$ et

$$R = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}.$$

Dans notre exemple, $R_1 = 30$ et $R_2 = 50$ donc $R = 10\sqrt{17}$. Le rayon de chacune des deux plaques identiques est $R \approx 41,2$cm.

2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

Ce problème met en jeu la moyenne quadratique des rayons des deux plaques.

IV. Problème 4 : vitesse moyenne

Un cycliste effectue la montée d'un col à la vitesse constante $v_1 = 20$ km/h. Une fois arrivé au col, il redescend par la même route à la vitesse constante $v_2 = 60$ km/h.

1. Calculer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet.

Notons L la distance (en km) parcourue à l'aller ou au retour et V_1et V_2 les vitesses de parcours de ce trajet respectivement à l'aller et au retour. La durée T de parcours de l'ensemble du trajet (en heures) est

$$T = \frac{L}{V_1} + \frac{L}{V_2}.$$

La distance parcourue en ce temps T en km est $L + L = 2L$, à la vitesse moyenne V, donc

$$T = \frac{2L}{V}.$$

Ainsi, en simplifiant par $2L$,

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right).$$

Dans notre exemple, comme $V_1 = 20$ et $V_2 = 60$,

$$V = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{60}} = 30.$$

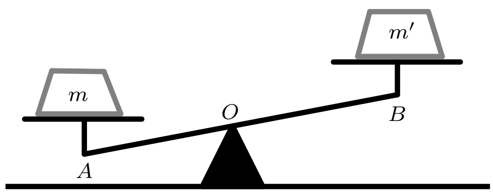
La vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est 30 km.h^{-1}.

2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

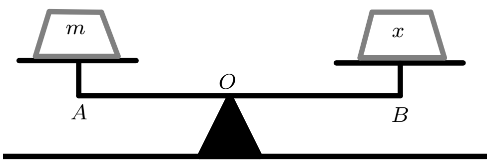
La moyenne mise en jeu est la moyenne harmonique des deux vitesses.

V. Problème 5 : double pesée

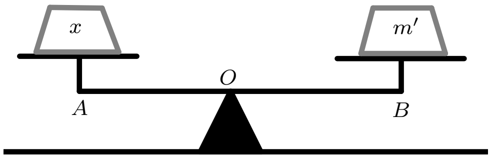
Une loi physique, la loi d'Archimède, permet d'affirmer que la balance ci-dessous est en équilibre si $m \times l = m' \times l'$ où m et m' sont les masses posées sur chaque plateau et l et l' sont respectivement les longueurs OA et OB des deux fléaux de la balance.



On souhaite déterminer la masse x d'un objet. On ne connaît pas les longueurs l et l' et on ne peut pas les mesurer. On dispose en revanche de diverses masses marquées. On réalise une première pesée, où l'équilibre est réalisé pour une masse m, conformément au schéma ci-dessous.



On réalise une seconde pesée, où l'équilibre est réalisé pour une masse m', conformément au schéma ci-dessous.



1. Exprimer x en fonction de m et m'.

   La loi d'Archimède appliquée aux équilibres des deux situations permet d'affirmer que $ml = xl'$ et $xl = m'l'$, donc

   $$\frac{m}{x} = \frac{l'}{l} = \frac{x}{m'}.$$

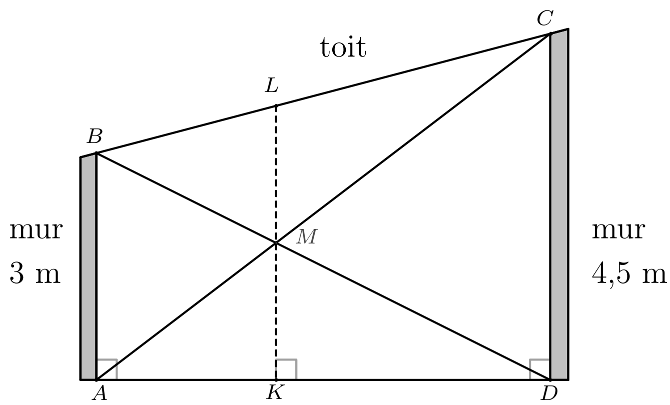
   Ainsi, $x^2 = mm'$ d'où puisque x est positif, $x = \sqrt{mm'}$.

2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

   La moyenne mise en jeu est la moyenne géométrique des deux masses.

VI. Problème 6 : le problème du bricoleur

Un bricoleur désire faire des travaux dans une pièce schématisée ci-dessous (la figure n'est pas à l'échelle).



Les segments $[AC]$ et $[BD]$ représentent deux échelles posées l'une contre l'autre qui se croisent en M. On pose $a = AB = 3$ m et $b = CD = 4,5$ m. Le bricoleur mesure $1,75$ m et se pose plusieurs questions :

— Peut-il passer sous les échelles sans avoir à se baisser ?

— S'il monte s'installer en M, pourra-t-il rester debout sans atteindre le toit ou devra-t-il s'accroupir ?

— Quelle serait la hauteur d'une cloison joignant les points K et L ?

1. En appliquant le théorème de Thalès à des configurations que l'on précisera, démontrer que :

$$\frac{b}{KM} = 1 + \frac{MC}{MA},$$
$$\frac{a}{ML} = 1 + \frac{MA}{MC},$$
$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC} = \frac{a}{b}.$$

Les triangles ACD et AMK sont en situation de Thalès ; en effet, les points A, M et C sont alignés, il en est de même pour les points A, K, D et la situation concrète permet de modéliser les deux murs de la pièce par des segments $[KM]$ et $[CD]$ portés par des droites parallèles puisque perpendiculaires à la droite (AD). Ainsi,

$$\frac{AC}{AM} = \frac{AD}{AK} = \frac{CD}{MK}.$$

De plus, M appartient à chacun des segments $[AC]$ et $[BD]$, donc d'après l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité, $AC = AM + MC$. L'égalité $\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{CD}{MK}$ s'écrit aussi

$$\frac{AM + MC}{AM} = \frac{b}{MK},$$

donc

$$1 + \frac{MC}{AM} = \frac{b}{MK}.$$

Par des considérations analogues, Les triangles CAB et CML sont également en situation de Thalès, donc

$$\frac{AB}{LM} = \frac{AC}{CM} = \frac{CB}{CL}$$

et comme $CA = CM + MA$, l'égalité $\dfrac{AC}{CM} = \dfrac{AB}{ML}$ s'écrit

$$\frac{AM + MC}{MC} = \frac{a}{ML},$$

donc

$$1 + \frac{AM}{MC} = \frac{a}{ML}.$$

Le théorème de Thalès appliqué aux triangles MBA et MCD permet d'écrire

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC} = \frac{AB}{CD}.$$

Ainsi,

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC} = \frac{a}{b}.$$

Les trois égalités sont bien établies.

2. Répondre à chacune des questions que se pose le bricoleur.

Le bricoleur peut-il passer sous les échelles sans avoir à se baisser ? On calcule MK pour la comparer à la taille du bricoleur.

$$\frac{4,5}{KM} = 1 + \frac{4,5}{3}$$

donc $KM = \dfrac{4,5}{2,5} = 1,8$. Comme $KM > 1,75$, le bricoleur pourra passer sous les deux échelles.

S'il monte s'installer en M, pourra-t-il rester debout ou devra-t-il s'accroupir ? On calcule ML pour le comparer à la taille du bricoleur :

$$\frac{3}{ML} = 1 + \frac{3}{4,5},$$

donc $ML = \dfrac{9}{5} = 1,8$. Comme $ML > 1,75$, le bricoleur pourra rester debout.

Quelle serait la hauteur d'une cloison joignant les points K et L ? On calcule la longueur $KL = KM + ML = 3,6$. La hauteur d'une cloison joignant K à L serait de 3,6 m.

3. Exprimer KL sous la forme de l'une des moyennes de a et b.

On a $1+\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{b}{MK}$ et $1+\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{a}{ML}$, avec $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{a}{b}$. Donc, $\dfrac{b}{MK}=1+\dfrac{b}{a}$ d'où

$$MK=\frac{b}{1+\frac{b}{a}}=\frac{ab}{a+b}.$$

De plus, $\dfrac{a}{ML}=1+\dfrac{a}{b}$, d'où

$$ML=\frac{a}{1+\frac{a}{b}}=\frac{ab}{a+b}.$$

Comme M appartient au segment [LK], on a

$$LK=LM+MK=2\frac{ab}{a+b}.$$

LK est la moyenne harmonique de a et b puisque

$$\frac{1}{LK}=\frac{1}{2}\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

VII. Problème 7 : hauteur d'un triangle rectangle

Dans un triangle AMB rectangle en M, on note H le pied de la hauteur issue de M. On désigne par a la longueur du segment $[HA]$ et b celle du segment $[HB]$.

1. Démontrer que les triangles AHM et MHB sont semblables et en déduire la longueur MH en fonction de a et b.

Comme le triangle AHM est rectangle en H, les angles $\widehat{MAH}$ et $\widehat{AMH}$ sont complémentaires ; or l'angle $\widehat{AMH}$ est également complémentaire de $\widehat{HMB}$. Donc les angles $\widehat{MAH}$ et $\widehat{HMB}$ sont égaux. Les triangles rectangles AHM et MHB sont donc semblables puisqu'ils ont deux (et donc trois) angles égaux. Ainsi,

$$\frac{MB}{MA}=\frac{HB}{MH}=\frac{MH}{HA}.$$

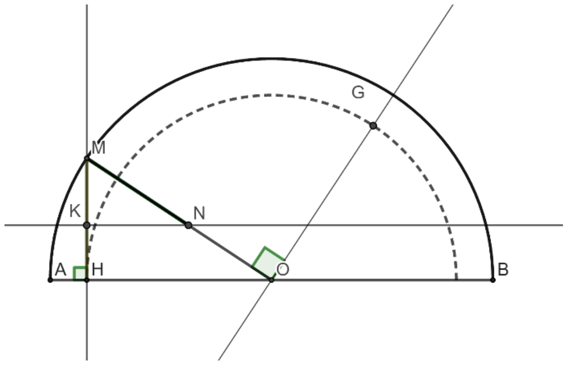
On en déduit $MH^2=HB\times HA=ab$ donc $MH=\sqrt{ab}$.

2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

Ce problème met en jeu la moyenne géométrique des longueurs HA et HB.

Partie B : toutes les moyennes sur une même figure

VIII. Construire une figure d'après la description suivante : soit $[AB]$ un segment de milieu O. Tracer Γ un demi-cercle de diamètre $[AB]$. On considère un point H du segment $[OA]$, distinct de O et de A. La perpendiculaire en H à la droite (AB) coupe le demi-cercle Γ en M. On pose $AH=a$ et $HB=b$. La figure sera complétée au fur et à mesure.



IX. Interprétation géométrique des différentes moyennes

1. Exprimer OM en fonction de a et b. La longueur OM représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.

M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ donc

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{AH + HB}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

(H appartient par construction au segment $[AB]$, donc $AB = AH + HB$). Ainsi OM est la moyenne arithmétique de a et b.

2. Justifier que $MH^2 = ab$. La longueur MH représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.

Comme M appartient au cercle de diamètre $[AB]$, le triangle ABM est rectangle en M et H est le pied de la hauteur issue de M. Donc d'après le résultat établi au problème 7, $MH = \sqrt{ab}$. Ainsi MH est la moyenne géométrique de a et b.

3. Soit Γ' le demi-cercle de centre O passant par H qui coupe le segment $[OM]$. La perpendiculaire en O à la droite (OM) coupe Γ' en G. Exprimer OG en fonction de a et b.

G appartient au cercle de centre O et passant par H donc $OG = OH$. On peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle OMH rectangle en H :

$$OH^2 = OM^2 - MH^2.$$

Donc

$$OH^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Ainsi $OG = OH = \left|\dfrac{a-b}{2}\right|$. Comme H est un point du segment $[OA]$, nécessairement $b \geqslant a$ et donc $OG = OH = \dfrac{b-a}{2}$.

4. En déduire une expression de MG en fonction de a et b. La longueur MG représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.

On applique le théorème de Pythagore au triangle OMG rectangle en O :

$$MG^2 = MO^2 + GO^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Donc $MG = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Ainsi MG est la moyenne quadratique de a et b.

5. On considère le point N du segment $[OM]$ tel que $MN = MH$. La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe le segment $[MH]$ en K. Exprimer MK en fonction de a et b. La longueur MK représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.

Les triangles MKN et MHO sont en situation de Thalès ; en effet les droites (LN) et (HO) sont parallèles et les points M, K, H d'une part et M, N, O d'autre part, sont alignés. En appliquant le théorème de Thalès,

$$\frac{MK}{MH} = \frac{MN}{MO}.$$

Ainsi

$$MK = \frac{MN \times MH}{MO} = \frac{MH^2}{OM} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Ainsi MK est la moyenne harmonique de a et b.

6. Ordonner les quatre longueurs MO, MH, MG et MK en justifiant l'ordre.

$MG \geqslant MO$ puisque $[MG]$ est l'hypoténuse du triangle rectangle MGO dont l'un des côté est $[MO]$.
$MO \geqslant MH$ puisque $[MO]$ est l'hypoténuse du triangle rectangle MOH dont $[MH]$ est l'un des côtés.
$MH \geqslant MK$ puisque K appartient au segment $[MH]$.
Ainsi $MG \geqslant MO \geqslant MH \geqslant MK$.
Remarque : lorsque les nombres a et b sont égaux, alors $H = O = G = K$.

Partie C : moyenne associée à une fonction

X. Soit F une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Démontrer que, pour tous nombres réels strictement positifs a et b, il existe un unique nombre strictement positif, noté α_F tel que

$$F(\alpha_F) = \frac{F(a) + F(b)}{2}.$$

F étant strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre compris entre $F(a)$ et $F(b)$ possède par F un unique antécédent compris entre a et b. La moyenne arithmétique $\frac{F(a) + F(b)}{2}$ de $F(a)$ et $F(b)$ est comprise entre $F(a)$ et $F(b)$. Donc $\frac{F(a) + F(b)}{2}$ possède un unique antécédent par F compris entre a et b ; notons le α_F. Alors α_F est l'unique réel qui vérifie $F(\alpha_F) = \frac{F(a) + F(b)}{2}$ et, comme il est compris entre a et b qui sont tous deux strictement positifs, α_F est strictement positif.

Déterminer quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 continues et strictement monotones sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que, pour tous nombres réels a et b strictement positifs,

$$m = \alpha_{F_1}, \qquad q = \alpha_{F_2}, \qquad g = \alpha_{F_3}, \qquad h = \alpha_{F_4}.$$

Vérifions que la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F_1(x) = x$ convient :

$$\frac{F_1(a) + F_1(b)}{2} = \frac{a+b}{2} = m(a,b) = F_1(m(a,b)).$$

Cette fonction convient car $\alpha_{F_1} = m$.
Vérifions que la fonction F_2 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F_2(x) = x^2$ convient : F_2 est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\frac{F_2(a) + F_2(b)}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} = F_2\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right) = F_2(q).$$

Ainsi, on a bien $\alpha_{F_2} = q$.
Vérifions que la fonction F_3 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F_3(x) = \ln(x)$ convient : F_3 est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

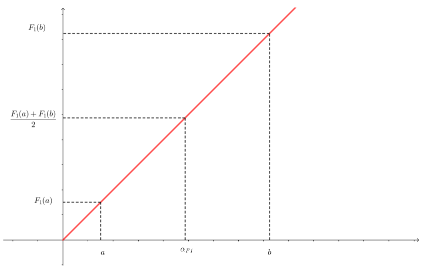
$$\frac{F_3(a) + F_3(b)}{2} = \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} = \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln(\sqrt{ab}) = F_3(\sqrt{ab}) = F_3(g).$$

On a bien $\alpha_{F_3} = g$.
Vérifions que la fonction F_4 la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F_4(x) = \dfrac{1}{x}$ convient : F_4 est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

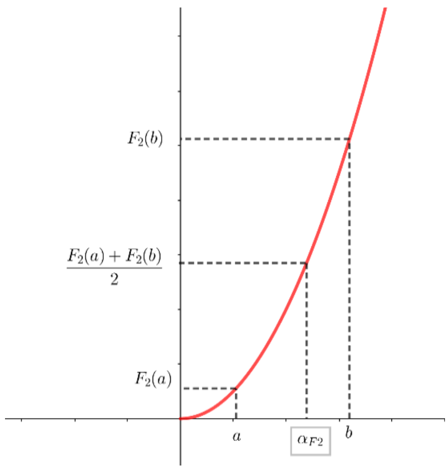
$$\frac{F_4(a) + F_4(b)}{2} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = F_4\left(\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right) = F_4(h).$$

On a bien $\alpha_{F_4} = h$.

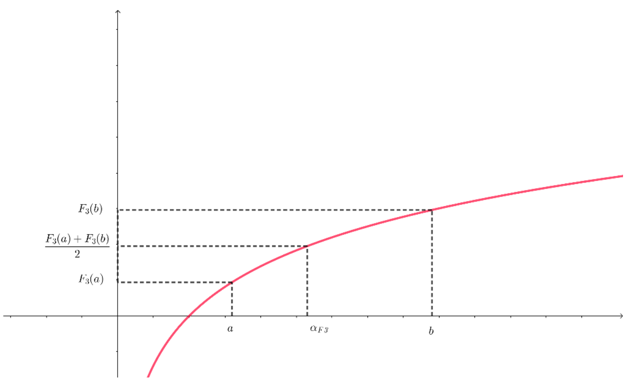
2. Représenter graphiquement, sur quatre graphiques différents, les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4. Pour chaque représentation graphique, indiquer, pour deux nombres strictement positifs a et b donnés, où se situe le point α_{F_i}.



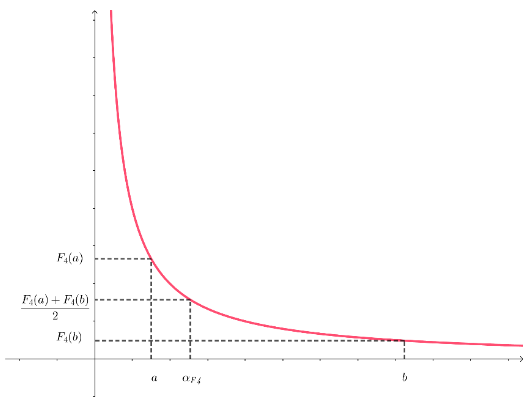
Moyenne arithmétique



Moyenne quadratique



Moyenne géométrique



Moyenne harmonique

Partie D : moyennes de n nombres positifs

On généralise les définitions de la partie A au cas de n nombres réels positifs et on se propose de comparer ces différentes moyennes.

Définitions
Étant donnés un entier naturel $n \geqslant 2$ et n nombres réels $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ positifs, on appelle :

- *moyenne arithmétique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $m = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$,
- *moyenne quadratique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$,
- *moyenne géométrique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $g = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$.
  Lorsque $a_1,\ a_2, \dots a_n$ sont strictement positifs, on appelle :
- *moyenne harmonique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre strictement positif h tel que

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

XI. Comparaison entre m et q

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ des nombres réels positifs.

1. Démontrer par récurrence sur n que :

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i - a_j)^2.$$

Soit pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, la proposition (P_n) suivante :

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i - a_j)^2.$$

(P_2) est vraie : en effet,

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (a_i - a_j)^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 = 2a_1^2 + 2a_2^2 = 2(a_1^2 + a_2^2).$$

Supposons que, pour un entier naturel n, (P_n) est vraie et montrons que (P_{n+1})

l'est aussi :

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} (a_i-a_j)^2\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i-a_j)^2 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (a_i-a_{n+1})^2\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i\\
&+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i-a_j)^2 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (a_i^2 + a_{n+1}^2 - 2a_i a_{n+1})\\
&= n\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^2 + 2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^2 + na_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i\\
&= (n+1)\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^2 + (n+1)a_{n+1}^2\\
&= (n+1)\sum_{1\leqslant i\leqslant n+1} a_i^2.
\end{aligned}$$

donc, (P_{n+1}) est vraie.
Comme (P_2) est vraie et $(P_n) \Longrightarrow (P_{n+1})$ pour tout $n \geqslant 2$, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, (P_n) est vraie.

2. En déduire l'inégalité $m \leqslant q$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i-a_j)^2.$$

chacun des termes $(a_i-a_j)^2$ étant positif, on a

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i-a_j)^2 \geqslant 0.$$

Donc,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i-a_j)^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

Par conséquent,

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

donc

$$\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

(Chacun des nombres a_i étant positif, leur somme l'est également). Ainsi,

$$\frac{1}{n}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Donc, la fonction racine carrée étant croissante,

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

c'est à dire $m \leqslant q$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $m = q$.

L'inégalité est une égalité si et seulement si

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i - a_j)^2 = 0,$$

c'est-à-dire pour chaque couple (i, j) avec $1 \leqslant i < j < n$, $(a_i - a_j)^2 = 0$ autrement dit, $a_i = a_j$. L'inégalité est donc une égalité si et seulement si tous les nombres a_i sont égaux.

XII. Comparaison entre m et g

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\ln x \leqslant x - 1$.

Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$. Cette fonction, différence de deux fonctions dérivables sur I , est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Le signe de f'sur I est celui de $1-x$, donc positif sur $]0; 1[$ puis négatif sur $]1; +\infty[$. La fonction f est strictement croissante sur $]0; 1[$ puis strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$ Le maximum de f sur I est donc $f(1) = 0$. On en déduit que la fonction f est négative sur I. Ainsi , pour tout réel strictement positif x, $\ln(x) \leqslant x - 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ des nombres réels strictement positifs.

a. En appliquant successivement l'inégalité précédente aux nombres $\dfrac{a_i}{m}$, démontrer que $g \leqslant m$.

Pour tout nombre a_i avec i variant de 1 à n,

$$\ln\left(\frac{a_i}{m}\right) \leqslant \frac{a_i}{m} - 1.$$

En, additionnant membre à membre ces n inégalités, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{a_i}{m}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{m} - n.$$

On en déduit :

$$\ln\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{a_i}{m}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{m} - n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} a_i - n = \frac{mn}{m} - n = 0.$$

D'où

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{m} \leqslant 1$$

et ainsi

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant m^n.$$

D'où l'inégalité suivante, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto^n \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant m,$$

soit $g \leqslant m$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $g = m$.

L'inégalité est une égalité si et seulement si pour chacun des a_i, $\dfrac{a_i}{m} = 1$, c'est-à-dire si tous les a_i sont égaux entre eux.

XIII. Comparaison entre g et h

On se place dans les mêmes conditions qu'à la question **XII.2.**

1. En appliquant l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique à des nombres bien choisis, comparer g et h.

Nous savons que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour n nombres réels $b_1, \ldots, b_n$ strictement positifs

$$\sqrt[n]{\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} b_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

En choisissant $b_i = \dfrac{1}{a_i}$, on obtient

$$\sqrt[n]{\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Ainsi , en utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i},$$

d'où $h \leqslant g$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $g = h$.

$h = g$ si et seulement si

$$g\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) = m\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right),$$

D' après la question **XII.2.b**, cette égalité est réalisée si et seulement si tous les nombres $\dfrac{1}{a_i}$ sont égaux entre eux ce qui équivaut à dire que tous les a_i sont égaux entre eux.

Partie E : moyennes de variables aléatoires

On rappelle qu'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ fini suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle prend comme valeurs 1 et 0 avec les probabilités

$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.
Dans toute cette section, $X_1,\ X_2,\dots X_n$ désignent n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ et $F_n=\dfrac{1}{n}S_n$.

XIV. Calculer l'espérance et la variance de X_1.

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= 1\times P(X_1=1)+0\times P(X_1=0)=p.\\
V(X_1) &= E((X_1-E(X_1))^2)\\
&= (1-p)^2\times P(X_1=1)+(0-p)^2\times P(X_1=0)\\
&= (1-p)^2p+p^2(1-p)\\
&= p(1-p)(1-p+p)\\
&= p(1-p).
\end{aligned}$$

XV. Étude des variables aléatoires S_n et F_n

1. Calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.
Rappel : soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers, alors, par linéarité de l'espérance, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$; cette propriété de linéarité se généralise à n variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$; cette propriété se généralise à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Ainsi , $E(S_n)=np$ et $V(S_n)=np(1-p)$.

2. Que représente la variable S_n ? Rappeler sa loi de probabilité.
S_n représente le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli. Les $n+1$ valeurs prises par S_n sont $0,\dots,n$. Pour i compris entre 0 et n,

$$P(S_n=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}.$$

3. Calculer l'espérance et la variance de la variable F_n.
Rappel : si X est une variable aléatoire et k un réel, $E(kX)=kE(X)$ et $V(X)=k^2V(X)$. Ainsi , $E(F_n)=\dfrac{1}{n}E(S_n)=p$ et $V(F_n)=\dfrac{1}{n^2}V(S_n)=\dfrac{p(1-p)}{n}$.

4. Que représente la variable F_n ? Déterminer sa loi de probabilité.
F_n représente la fréquence de succès lors de la répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli. Les $n+1$ valeurs prises par F_n sont $0,\dfrac{1}{n},\dots,\dfrac{n-1}{n},1$ et pour tout i compris entre 0 et n,

$$P\left(F_n=\frac{i}{n}\right)=P\left(\frac{S_n}{n}=\frac{i}{n}\right)=P(S_n=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}.$$

XVI. **1. Inégalité de Markov**
Soit Y une variable aléatoire positive définie sur Ω. On note $E(Y)$ son espérance. En décomposant $Y(\Omega)=Y_1\cup Y_2$, avec

$$Y_1=\{y\in Y(\Omega),\ y\geqslant a\},\qquad Y_2=\{y\in Y(\Omega),\ y<a\},$$

démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a}.$$

Soit a un réel positif,

$$E(Y) = \sum_{\in Y_1} y \times P(Y = y) + \sum_{y \in Y_2} y \times P(Y = y).$$

Comme Y est à valeurs positives, pour tout y appartenant à Y_2, $y \geqslant 0$ donc

$$\begin{aligned} E(Y) &\geqslant \sum_{y \in Y_1} y \times P(Y = y) \\ &\geqslant \sum_{y \in Y_1} aP(Y = y) \\ &\geqslant aP(Y_1) \\ &\geqslant aP(Y \geqslant a). \end{aligned}$$

L'inégalité de Markov s'en déduit immédiatement.

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire définie Ω. On note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

Posons $Y = |X - E(X)|^2 = (X - E(X))^2$. Alors Y est positive et $E(Y) = V(X)$. De plus, Pour tout réel $a > 0$, l'événement $(Y \geqslant a^2)$ est égal à l'événement $(|X - E(X)| \geqslant a)$. En appliquant l'inégalité de Markov à Y, on obtient

$$P(Y \geqslant a^2) \leqslant \frac{E(Y)}{a^2}$$

qui s'écrit aussi :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

3. On reprend les notations de l'introduction de la partie E.

a. Démontrer que, pour tout réel ϵ strictement positif,

$$P\left(|F_n - p| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

Si on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire F_n, il vient :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2}.$$

Ainsi,

$$P(|F_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Une étude de la fonction $p \mapsto p(1-p)$ sur $[0\,;1]$ montre que cette fonction est majorée sur $[0\,;1]$ par $\frac{1}{4}$. Ainsi,

$$P(|F_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

b. Expliquer comment, lorsque p est inconnu, cette inégalité permet d'en fournir une estimation. Comment s'appelle le théorème sous-jacent ?

Si le nombre de répétitions d'une épreuve de Bernoulli est grand, F_n est une estimation convenable de p puisque la probabilité que p s'écarte de la fréquence tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Le théorème sous-jacent est la loi faible des grands nombres.

XVII. Application

Un problème historique dû au Chevalier de Méré est rapporté dans la correspondance entre Pascal et Fermat. Grand joueur, le chevalier de Méré s'intéressait aux jeux de hasard sur lesquels il misait de l'argent. À l'issue de nombreuses parties, il avait constaté avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois un six en lançant quatre fois un dé à six faces et moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés. Ce résultat lui semblait en contradiction avec l'égalité des rapports $\dfrac{24}{36}$ et $\dfrac{4}{6}$ du nombre de lancers au nombre de faces.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six à l'issue de 4 lancers d'un dé.

La variable aléatoire S_4, qui associe à chaque lancer de quatre dés le nombre de six obtenus est $S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ où chacun des X_i, pour i allant de 1 à 4 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{6}$ et ces variables sont indépendantes. Donc

$$P(S_4 \geqslant 1) = 1 - P(S_4 = 0) = 1 - \prod_{i=1}^{4} P(X_i = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un double-six à l'issue de 24 lancers de deux dés.

La variable aléatoire S'_{24} qui associe à chaque répétition de 24 lancers de deux dés le nombre de double six est

$$S'_{24} = \sum_{i=1}^{24} Y_i$$

où Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p' = \dfrac{1}{36}$, probabilité d'obtenir un double six lors du lancer d'une paire de dés et ces variables sont indépendantes. Donc :

$$P(S'_{24} \geqslant 1) = 1 - P(S'_{24} = 0) = 1 - \prod_{i=1}^{24} P(Y_i = 0) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

3. A-t-on plus ou moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un six en lançant quatre fois un dé à six faces ?

$$P(S_4 \geqslant 1) = \frac{671}{1296} \approx 0,518.$$

Il y a donc plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un six en lançant 4 dés.

4. A-t-on plus ou moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés à six faces ?

$$P(S'_{24} \geqslant 1) \approx 0,491.$$

Il y a donc moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés.

5. Le texte ci-dessous reproduit l'extrait d'une lettre adressée par Fermat à Pascal en 1654.

« Monsieur,

Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré. Il me disait donc qu'il avait trouvé faussseté dans les nombres par cette raison : si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire un double six avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé). Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes. »

Expliquer comment ce texte historique pourrait être utilisé en classe pour illustrer les réponses aux questions **3.** et **4.** Quelle est l'erreur de raisonnement commise par le Chevalier de Méré ?

Questionnement 1 (auprès des élèves) : de quoi parle le chevalier de Méré en évoquant 671 à 625 ? $\dfrac{5^4}{6^4} = \dfrac{625}{1296}$ est la probabilité de n'obtenir aucun six au cours de 4 lancers d'un dé à six faces. $\dfrac{671}{1296}$ est la probabilité d'obtenir au moins un six au cours des 4 lancers. Elle est supérieure à la précédente. On retrouve qu'en lançant 4 dés, on a plus de chance d'obtenir au moins un six que de ne pas en obtenir du tout. D'où « l'avantage de l'entreprendre en 4 lancers ».

En multipliant les expériences, Méré semble avoir observé qu'en lançant 24 fois deux dés, la probabilité d'obtenir au moins un double-six est inférieure à $\dfrac{1}{2}$ (« désavantage de l'entreprendre en 24 »). Ceci est conforme au fait que $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} > \dfrac{1}{2}$.

Questionnement 2 : que traduisent les quotients $\dfrac{4}{6}$ et $\dfrac{24}{36}$ égaux dont parle le chevalier de Méré ? Du point de vue de Méré, les probabilités de succès dans l'une et l'autre expérience devraient être égales au motif que le rapport du nombre de lancers par rapport au nombre de résultats possibles à chaque lancer sont égaux ; pour l'un $\dfrac{4}{6}$ et et pour l'autre $\dfrac{24}{36}$.

6. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer au bout de combien de répétitions d'un lancer de quatre dés, la fréquence d'apparition d'au moins un six est supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

Avec les notations de la question 2, posons $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. On souhaite déterminer pour quelles valeurs de n,

$$P\left(F_n \geqslant \frac{1}{2}\right) \geqslant 0,95 \Longleftrightarrow P\left(F_n < \frac{1}{2}\right) < 0,05.$$

L'événement $\left(F_n < \dfrac{1}{2}\right)$ s'écrit aussi

$$F_n - \frac{671}{1296} < \frac{1}{2} - \frac{671}{1296}$$

et en posant, $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{671}{1296}$ et $p = \dfrac{671}{1296}$, cet événement s'écrit $(F_n - p < -\varepsilon)$. Cet événement est contenu dans l'événement $|F_n - p| \geqslant \varepsilon$. Donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ,

$$P(F_n - p < -\varepsilon) \leqslant P(|F_n - 671/1296| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Il suffit de choisir l'entier n tel que

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} < 0,05,$$

ou autrement dit

$$n > \frac{1}{4 \times 0,05 \times \varepsilon^2},$$

pour avoir $P\left(F_n \geqslant \frac{1}{2}\right) > 0,95$. En remplaçant la valeur de ε, on obtient $n >$ 15 875. Donc, si on reproduit l'expérience au moins 15 876 fois, la probabilité de la fréquence d'obtention d'au moins un six est supérieur à $\frac{1}{2}$ avec une probabilité d'au moins 95%. Il est permis de douter du fait que monsieur De Méré ait procédé a autant d'expériences.

Remarque. A l'aide d'un tableur, on peut constater que

$$P\left(F_n < \frac{n}{2}\right) \leqslant 0,05$$

si $n \geqslant 2146$ ou si n est un nombre pair compris entre 2090 et 2144.

7. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer au bout de combien de répétitions d'un lancer de vint-quatre dés, la fréquence d'apparition d'au moins un double-six est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

De la même façon, on cherche à déterminer pour quelles valeurs de n,

$$P\left(F'_n < \frac{1}{2}\right) > 0,95.$$

Posons $p' = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ et $\varepsilon' = \frac{1}{2} - p'$. Par le même raisonnement que précédemment, il suffit de choisir l'entier n tel que

$$\frac{1}{4n\varepsilon'^2} < 0,05.$$

Or $\varepsilon' > 8 \times 10^{-3}$. Il suffit donc de réaliser l'inégalité

$$n > \frac{10^6}{0,2 \times 64} = 78125.$$

Si on reproduit l'expérience au moins 78 125 fois, la probabilité que la fréquence d'obtention d'au moins un double six soit supérieur à $\frac{1}{2}$ est d'au moins 95%.

8. Quels commentaires vous inspirent ces résultats ?

Le nombre de simulations déterminés à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est, dans les deux cas, très grand : cela est dû à la faible efficacité de cette inégalité. Il est possible d'obtenir un meilleur encadrement du nombre minimal de simulations nécessaires dans chacun des deux cas, à l'aide de méthodes plus performantes.

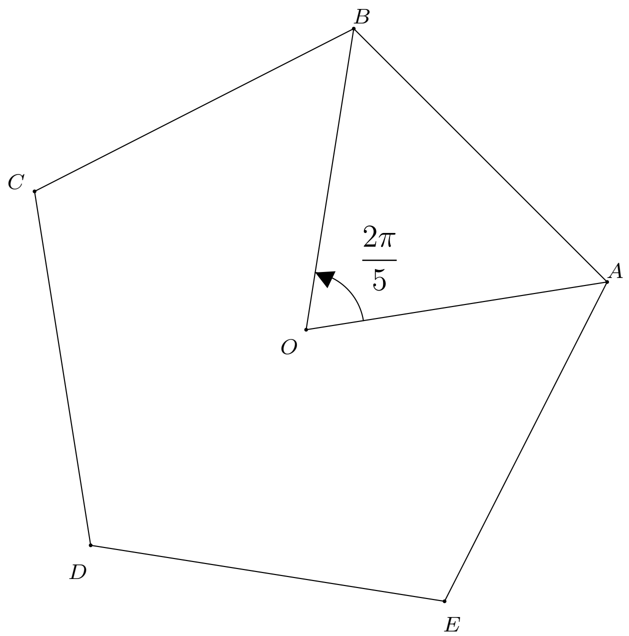
Problème n° 2

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On se place dans un plan euclidien orienté d'origine O. Si M_1, M_2, M_3 sont trois points distincts du plan, on note $\widehat{M_1M_2M_3}$ l'angle orienté $(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3})$. Les mesures de tous les angles considérés sont exprimées en radian. On note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$.

Partie A : pentagones réguliers

Les sommets A, B, C, D, E d'un pentagone régulier convexe de centre O sont définis par $A \neq O$; $B = r(A)$; $C = r(B)$; $D = r(C)$; $E = r(D)$.



I. Côtés, angles et diagonales d'un pentagone régulier convexe

1. **a.** Démontrer que $r(E) = A$.

$OE = OD = OC = OB = OA$. De plus, l'angle $\widehat{EOA}$ est égal à

$$2\pi - 4 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}.$$

On en déduit que $r(E) = A$.

b. Justifier que les côtés du pentagone $ABCDE$ sont tous de même longueur et que ses angles au sommet sont tous de même mesure.

Pour les côtés : on a $r(A) = B$ et $r(B) = C$. La rotation r étant une isométrie, on en déduit que $BC = r(A)r(B) = AB$. Le même raisonnement montre que $CD = BC$ et que $DE = CD$. Enfin, puisqu'on a également $r(E) = A$, on

obtient aussi que $EA = r(D)r(E) = DE$, d'où finalement $AB = BC = CD = DE = EA$.
Pour les angles au sommet : la rotation r préserve les angles, donc

$$\widehat{r(A)r(B)r(C)} = \widehat{ABC},$$

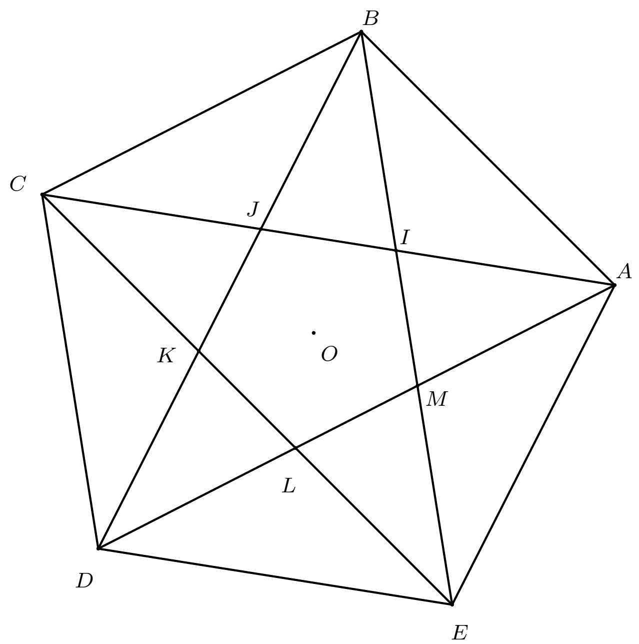
c'est-à-dire que $\widehat{BCD} = \widehat{ABC}$. On procède de même pour les autres angles.

c. Démontrer que cette mesure est égale à $\dfrac{3\pi}{5}$.

On pourra utiliser les angles du triangle OAB. Toutes les justifications sont attendues.

Le triangle OAB est isocèle en O, donc ses angles en A et en B sont égaux à un même angle α. La somme des angles du triangle OAB est par ailleurs égale à π, donc $\dfrac{2\pi}{5} + \alpha + \alpha = \pi$, d'où $\alpha = \dfrac{\pi - \dfrac{2\pi}{5}}{2} = \dfrac{3\pi}{10}$. Le même raisonnement dans le triangle OBC donne le même résultat, on a donc $\widehat{CBO} = \dfrac{3\pi}{10}$, et donc $\widehat{CBA} = \widehat{CBO} + \widehat{OBA} = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{3\pi}{5}$.

Les segments $[AC]$, $[BD]$, $[CE]$, $[DA]$ et $[EB]$ sont appelés *diagonales* du pentagone $ABCDE$. Les points I, J, K, L, M sont définis conformément au schéma ci-dessous :



2. Démontrer que les diagonales du pentagone $ABCDE$ sont toutes de même longueur.

Puisque r est une isométrie, on a $AC = r(A)r(C) = BD = r(B)r(D) = CE = r(C)r(E) = DA = r(D)r(A) = EB$.

II. Un second pentagone régulier convexe

1. Démontrer que $r(I) = J$, puis que $IJKLM$ est un pentagone convexe régulier de centre O.

On a $\{I\} = (AC) \cap (BE)$, donc $\{r(I)\} = r((AC)) \cap r((BE)) = (BD) \cap (CA) = \{J\}$. Ainsi, $r(I) = J$. Par le même raisonnement, on obtient que $r(J) = K$, puis que $r(K) = L$, et enfin que $r(L) = M$. Le pentagone $IJKLM$ est donc régulier et de centre O.

2. En déduire les mesures des angles $\widehat{IJB}$ et $\widehat{BIJ}$, puis celles de l'angle $\widehat{JBI}$.

D'après I.2 appliqué au pentagone $IJKLM$, régulier de centre O, l'angle $\widehat{IJK}$ est de mesure $\frac{3\pi}{5}$. Par ailleurs, les angles $\widehat{IJB}$ et $\widehat{IJK}$ sont supplémentaires. On en déduit que $\widehat{IJB} = \pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$. Le même raisonnement à partir des angles supplémentaires $\widehat{MIJ}$ et $\widehat{BIJ}$ donne aussi $\widehat{BIJ} = \frac{2\pi}{5}$. Enfin, en sommant les angles du triangle BIJ,

$$\widehat{JBI} = \pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}.$$

3. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{IBA}$ (le résultat obtenu sera démontré).

On considère la symétrie orthogonale s d'axe (OB). Alors $s(B) = B$. Comme $OA = OC$ et $AB = BC$ (deux côtés du pentagone régulier $ABCDE$), (OB) est la médiatrice de $[AC]$, donc $s(A) = C$ et $s(C) = A$. De plus, $OD = OE$ et $BD = BE$ (deux diagonales du pentagone régulier $ABCDE$). Par suite, (OB) est la médiatrice de $[DE]$ et donc $s(D) = E$ et $s(E) = D$. On en déduit que

$$\{s(I)\} = s((BE)) \cap s((AC)) = (BD) \cap (CA) = \{J\},$$

donc $s(I) = J$ et $s(J) = I$. Enfin, s envoie le triangle IBA sur le triangle JBC. Comme s est une isométrie, $\widehat{IBA} = \widehat{JBC}$. On en déduit que

$$\widehat{ABC} = \frac{3\pi}{5} = \widehat{IBA} + \widehat{IBJ} + \widehat{JBC} = 2\widehat{IBA} + \frac{\pi}{5},$$

donc $\widehat{IBA} = \frac{\pi}{5}$.

4. Démontrer que le triangle ABJ est isocèle de sommet A.

D'une part, on a

$$\widehat{AJB} = \widehat{IJB} = \frac{2\pi}{5}.$$

D'autre part :

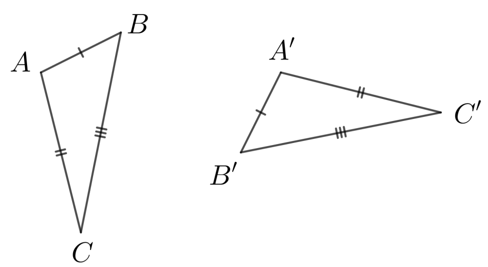
$$\widehat{ABJ} = \widehat{IBA} + \widehat{JBI} = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}.$$

Donc que le triangle ABJ est isocèle en A.

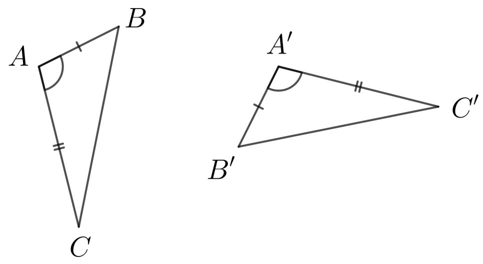
5. Écrire les trois cas d'égalité des triangles tels que vous les feriez figurer dans la trace écrite d'un élève du cycle 4.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles.

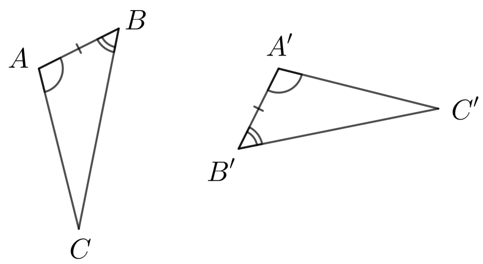
— Si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$, alors les deux triangles sont égaux.



— Si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, alors les deux triangles sont égaux.



— Si $AB = A'B'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, alors les deux triangles sont égaux.



6. Démontrer que les triangles AIM, BJI, CKJ, DLK et EML sont égaux.

On a vu que

$$\begin{array}{ccccc} r(A) = B, & r(B) = C, & r(C) = D, & r(D) = E, & r(E) = A, \\ r(I) = J, & r(J) = K, & r(K) = L, & r(L) = M, & r(M) = I. \end{array}$$

Donc r envoie les triangles AIM sur BJI, BJI sur CKJ, CKJ sur DLK et DLK sur EML. Ces cinq triangles sont donc égaux.

7. Démontrer que les triangles ABC et BJC sont semblables.

Il s'agit de démontrer que les angles de ces deux triangles sont deux à deux égaux. Dans le triangle ABC, nous savons que l'angle en B mesure $3\pi/5$. La somme des deux autres est donc égale à $\pi - 3\pi/5 = 2\pi/5$. De plus, le triangle ABC est isocèle en B, donc les angles en A et en C sont égaux. Chacun de ces deux angles est donc égal à $\pi/5$.
Dans le triangle BCJ, les angles en B et en C sont égaux à $\pi/5$ (même argument que celui tenu en II.3 pour $\widehat{ABE}$), et donc l'angle en J vaut $\pi - (\pi/5 + \pi/5) = 3\pi/5$.
Les triangles ABC et BCJ ont ainsi tous deux pour angles $\pi/5$, $\pi/5$ et $3\pi/5$. Ils sont donc semblables.

III. Un rapport particulier

On note φ le rapport $\dfrac{AC}{AB}$.

1. Démontrer que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

On a :

$$\varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{AJ + JC}{AB} = \frac{AJ}{AB} + \frac{JC}{AB} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{JC}},$$

puisque ABJ est isocèle en A (d'après II.3).
D'autre part, d'après II.6 et la propriété de Thalès pour les triangles semblables,

on a $\dfrac{AB}{JC} = \dfrac{AC}{BC}$, d'où finalement

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

2. Calculer la valeur de φ.
En multipliant par φ des deux côtés de l'égalité précédente, il vient que $\varphi^2 = \varphi + 1$, c'est-à-dire $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. La valeur φ est donc l'une des deux racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire que $\varphi = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Seule $(1 + \sqrt{5})/2$ étant positive, on a finalement

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. Démontrer que φ est un nombre irrationnel.
On a les équivalences :

$$\varphi \notin \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q} \Longleftrightarrow 1+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}.$$

Il nous suffit donc de démontrer que $\sqrt{5}$ est irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons $\sqrt{5}$ rationnel et soit $\dfrac{p}{q}$ la fraction irréductible à laquelle elle est égale, avec p, $q \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\dfrac{p^2}{q^2} = 5$, d'où $p^2 = 5q^2$. La valeur p^2 est donc divisible par 5, et donc p aussi, puisque 5 est premier. On peut donc écrire p sous la forme $5p'$ avec p' entier naturel non nul, si bien que $5q^2 = p^2 = 25p'^2$, d'où $q^2 = 5p'^2$. On en tire que 5 divise q^2, donc que 5 divise q. Nous avons donc obtenu que 5 divise à la fois p et q, ce qui contredit le fait que $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

Partie B : Fractions continues

L'objectif de cette partie est de déterminer une suite de nombre rationnels qui converge vers φ et d'en estimer la vitesse de convergence.
Si, dans l'égalité $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on substitue au φ du second membre l'expression $1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on obtient $\varphi = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}$. En remplaçant à nouveau le φ du second membre par $1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on obtient $\varphi = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}$. Ce procédé itératif suggère l'écriture de φ sous la forme

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

On se propose de formaliser cette écriture à l'aide d'une suite convergeant vers φ.

Pour cela, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

IV. Définition et premières valeurs

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est strictement positif.

On montre par récurrence sur n que, pour tout n, u_n existe et est strictement positif.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_0 = 1$. Si on suppose que, pour un entier n, u_n existe et est strictement positif, alors $f(u_n)$ est bien défini et est également strictement positif. D'où le resultat.

2. Donner, sous forme de fractions, les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

On obtient :

$$u_1 = \frac{2}{1}, \qquad u_2 = \frac{3}{2}, \qquad u_3 = \frac{5}{3}, \qquad u_4 = \frac{8}{5}, \qquad u_5 = \frac{13}{8}.$$

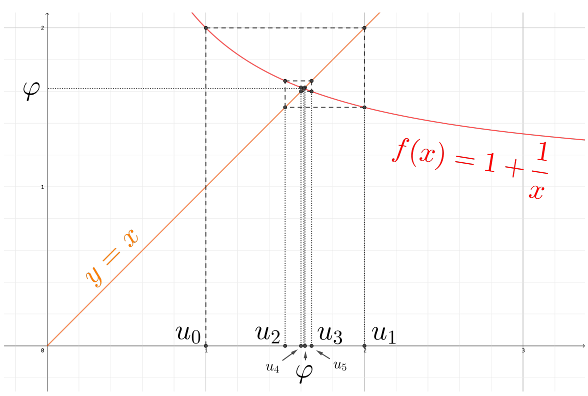
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un nombre rationnel.

On raisonne par récurrence pour démontrer que $u_n \in \mathbb{Q}_*^+$ pour tout n. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}_*^+$. Supposons (hypothèse de récurrence) que $u_n \in \mathbb{Q}_*^+$ pour une certaine valeur de n, et écrivons u_n sous la forme $\dfrac{p}{q}$ (avec p et $q \in \mathbb{N}^*$). Alors

$$u_{n+1} = f(u_n) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p},$$

qui est l'expression d'un rationnel positif non nul. On a donc $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_*^+$, et la propriété est démontrée.

4. Représenter sur un même graphique la fonction f, le nombre φ et les six premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



V. Convergence

1. Si on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la valeur de sa limite ?

La suite $(u_n)_n$ est positive, donc si elle converge vers une limite ℓ alors $\ell \geqslant 0$. Si $\ell = 0$, on obtient alors

$$0 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(u_n) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

ce qui est absurde. Donc $\ell > 0$. La fonction f étant continue sur $]0, +\infty[$, on a $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $\ell = 1 + \dfrac{1}{\ell}$. Nous avons déjà étudié cette équation en A.III, et pouvons donc en déduire que $\ell = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $\ell > 0$, nécessairement $\ell = \varphi$.

2. Démontrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par φ et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par φ.

La fonction f est strictement décroissante sur $]0\ +\infty[$, donc les suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont toutes deux monotones, de sens de croissance différents. Comme $u_2 > u_0$, $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est croissante et donc $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} < \varphi < u_{2n+1}.$$

C'est vrai pour $n = 0$, car $1 < \varphi < \dfrac{3}{2}$. Supposons le résultat vrai à un certain rang n. Alors $u_{2n} < \varphi < u_{2n+1}$. Comme f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on obtient

$$f(u_{2n}) = u_{2n+1} > f(\varphi) = \varphi > f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}.$$

Toujours par stricte décroissance de f, on en déduit que

$$f(\varphi) = \varphi < f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}.$$

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} < \varphi < u_{2n+1}.$$

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par φ), donc converge. De même, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par φ), donc converge. La limite de chacune de ces deux suites doit être une solution de l'équation $x = f \circ f(x))$, ce qui donne

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \iff x = \frac{2x+1}{x+1} \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

Les deux suites convergent donc vers $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, et come ces suites sont positives, les deux ont nécessairement pour limite $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même converge vers φ.

VI. Deux suites d'entiers

On définit deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 = q_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n. \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, p_n et q_n sont des nombres entiers strictement positifs.

On montre par récurrence que, pour tout entier n, p_n et q_n sont des entiers strictement positifs. On a $p_0 = q_0 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons que, pour une certaine valeur de $n \in \mathbb{N}$, p_n et q_n sont des entiers strictement positifs. On a alors $q_{n+1} = p_n$ et $p_{n+1} = p_n + q_n$ qui sont encore des entiers strictement positifs.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.
On a $p_0 = q_0 = q_1 = 1$ et $p_1 = 2$, donc $p_1 q_0 - p_0 q_1 = 2 - 1 = 1 = (-1)^0$. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à une certaine valeur de n. On écrit alors :

$$\begin{aligned} p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} &= (p_{n+1} + q_{n+1})p_n - p_{n+1}p_{n+1} \\ &= (p_{n+1} + q_{n+1})p_n - p_{n+1}(p_n + q_n) \\ &= q_{n+1}p_n - p_{n+1}q_n \\ &= -(p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}) \\ &= -(-1)^n \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

et la récurrence est démontrée.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{p_n}{q_n}$ est la fraction irréductible égale à u_n.

On a tout d'abord $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{1}{1} = u_0$. Si $\dfrac{p_n}{q_n} = u_n$, alors on a :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} = 1 + \frac{q_n}{p_n} = \frac{p_n + q_n}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Il ne reste donc qu'à montrer que les fractions $\dfrac{p_n}{q_n}$ sont toutes irréductibles. D'après l'égalité $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, et le théorème de Bézout, les entiers p_n et q_n sont premiers entre eux. Donc la fraction $\dfrac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

4. Démontrer que les deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} - p_n = q_n > 0$ d'après la question **VI.1**, donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Comme $q_{n+1} = p_n$ pour tout n, la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante à partir de $n = 1$.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$q_{n+1} > 2q_{n-1}.$$

Si $n \geqslant 2$, on a

$$q_{n+1} = p_n = p_{n-1} + q_{n-1} = q_n + q_{n-1} > q_{n-1} + q_{n-1} = 2q_{n-1},$$

l'inégalité découlant du fait que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante.

6. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $|u_n - \varphi| < |u_{n+1} - u_n| \leqslant 2^{-n}$.
Une conséquence de **V.2** est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont de part et d'autre de φ. On a donc $|u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - \varphi| + |\varphi - u_n| > |\varphi - u_n|$, ce qui démontre la première inégalité. (On ne peut pas avoir $|u_{n+1} - \varphi| = 0$ car, par exemple, u_{n+1} est rationnel alors que φ ne l'est pas.) Pour la seconde :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \\ &= \frac{|p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}|}{q_n q_{n+1}} \\ &= \frac{|(-1)^n|}{q_n q_{n+1}} \\ &= \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \end{aligned}$$

Ne reste qu'à démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $q_n q_{n+1} \geqslant 2^n$. On a $q_1 q_2 = 2 \cdot 3 = 6 > 2^2$. Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain $n \geqslant 1$. On a alors, à l'aide de la question 5 :

$$q_{n+1}q_{n+2} > q_{n+1} \cdot 2q_n = 2q_n q_{n+1} > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

la dernière inégalité étant une application de l'hypothèse de récurrence.

7. Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre ε strictement positif et qui renvoie deux listes finies d'entiers $[p_0, p_1, \cdots p_{n_0}]$, $[q_0, q_1, \cdots q_{n_0}]$ telles que $\dfrac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$ soit une valeur approchée de φ à ε près.

La relation $|u_n - \varphi| < 2^{-n}$ de **VI. 6** indique qu'une condition suffisante sur n pour que $|u_n - \varphi| < \varepsilon$ est donnée par $2^{-n} < \varepsilon$, c'est-à-dire $n \geq -\log_2(\varepsilon)$. On en tire la fonction `suites` suivante en Python :

```
import math    # Pour pouvoir utiliser log2 (logarithme binaire) et ceil (partie entière supérieure)

def suites(epsilon):
# Définition des suites p et q comme des listes, avec p_0=1 et q_0=1.
    p=[]
    q=[]
    p.append(1)
    q.append(1)
    n0=math.ceil(-math.log2(epsilon))   # Valeur de n_0 suggérée par la question III.4
    for n in range(1,1+n0):             # Calcul de p_n et de q_n pour tout entier n dans [1,1+n_0[=[1,n_0]
        p.append(p[n-1]+q[n-1])
        q.append(p[n-1])
    return (p,q)
```