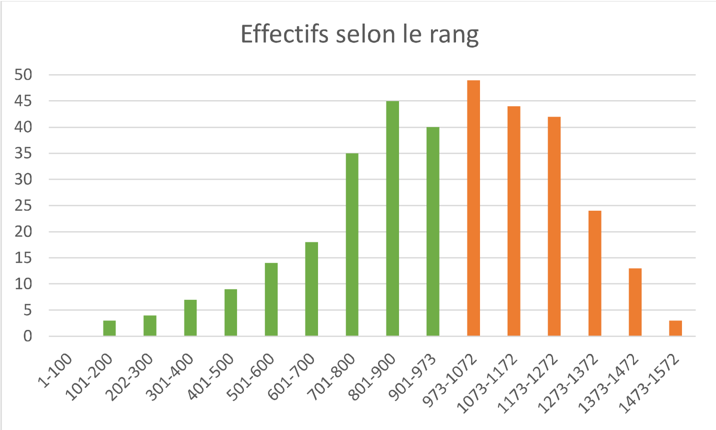

4 Analyse et commentaires : épreuves écrites

Les sujets ainsi que les corrigés des épreuves écrites sont disponibles sur le site du jury à l'adresse http://capes-math.org/.

4.1 Première épreuve écrite

Le sujet de la première épreuve de la session 2020 est constitué d'un seul problème. Structuré en six parties, ce problème aborde plusieurs notions : barycentre de n points du plan, courbes de Bézier et algorithme de Casteljau, polynômes de Bernstein, isométries du carré, raccordement de deux courbes de Bézier.
Conformément à la description générique de l'épreuve, il permet d'apprécier la connaissance de différentes notions mathématiques au programme : vecteurs du plan, coefficients binomiaux, polynômes, principe de récurrence, théorie des groupes, algèbre linéaire, courbes paramétrées. La résolution du problème sollicite également des capacités de raisonnement, de calcul et d'argumentation.
De manière générale, l'épreuve a été mal réussie, en raison, d'une part d'une maîtrise insuffisante des connaissances et des compétences mathématiques nécessaires à la résolution du problème, d'autre part d'un manque de rigueur, de clarté et de précision dans les justifications attendues.

4.1.a Les notions mathématiques mises en jeu dans le problème

Ce paragraphe présente une analyse qualitative et quantitative des réussites et des faiblesses constatées sur les différentes notions mathématiques mises en jeu dans le problème.

— **Le calcul vectoriel dans toute la partie A**
Le problème a été conçu sans supposer la connaissance préalable de la notion de barycentre, dont la définition est donnée dans l'énoncé. Le recours au calcul vectoriel est donc attendu dans la sous-partie I qui vise à démontrer les premières propriétés du barycentre (homogénéité, associativité, lien avec les applications affines).
Les candidats utilisent correctement la relation de Chasles. On regrette cependant qu'ils y aient recours de manière systématique, même lorsque l'utilisation de questions antérieures permet de conclure directement (par exemple, la question **A-I-3** se traitait en utilisant directement les questions **A-I-1 et A-I-2**).

On note des confusions entre les points du plan affine $\wp$ et les vecteurs de sa direction vectorielle $\vec{\wp}$. La notation de Grassmann $N = M + \vec{u}$ (qui traduit que le point N est l'image du point M dans la translation de vecteur $\vec{u}$) n'était absolument pas nécessaire pour traiter le problème. Lorsqu'elle a été utilisée, l'assimilation de la différence entre deux points de $\wp$ à un vecteur de $\vec{\wp}$ (du type $N - M = \overrightarrow{MN}$) nécessitait d'être justifiée par l'identification du point M de $\wp$ au vecteur $\overrightarrow{OM}$ de $\vec{\wp}$.
Concernant les sommes pondérées de points de $\wp$, signalons que l'égalité

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right) G$$

résulte elle-aussi de cette identification et de la relation vectorielle

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OP_i} = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{OG}.$$

C'est la raison pour laquelle une égalité du type

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right) G$$

ne pouvait pas être employée dans le problème avant la question A-I-3, qui visait justement à démontrer, pour tout point M de $\wp$, que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}.$$

La question de l'associativité simple (question **A-III-2**) est bien traitée par une majorité de candidats. Son utilisation pour démontrer la concourance des médianes d'un triangle est déjà moins réussie (seulement par 16,8 % de candidats).

— **Les calculs sur les sommes finies indexées**
Les calculs faisant intervenir la notation Σ ne sont pas toujours correctement menés, notamment pour ce qui concerne l'interversion de l'ordre des sommations dans une somme double ou la mise en facteur d'un terme indépendant de l'indice de sommation (**question A-III-3**).

— **L'algèbre générale**

- **Question A-I-1-b**

Si la question de l'injectivité est dans l'ensemble bien traitée, celle de la surjectivité en revanche ne l'est pas, 81,8 % des candidats ne sachant même pas poser le problème, à savoir : partir d'un vecteur quelconque de $\vec{P}$ et en rechercher un antécédent par l'application f. Au lieu de cela, trop de candidats se contentent d'affirmer que tout point du plan à une unique image ou encore qu'en dimension finie, une application injective est nécessairement bijective, manifestant ainsi un manque de maîtrise de la notion.

- **Question E-XVII-2**

Alors qu'il s'agit de démontrer la bijectivité de l'application $f \mapsto s_\Delta \circ f$, une proportion non négligeable de candidats démontre, pour tout $f \in \Im^+(Q)$, la bijectivité de $s_\Delta \circ f$.
La preuve de la bijectivité de F passe par deux étapes : d'abord la justification que F est bien une application de $\Im^+(Q)$ dans $\Im^-(Q)$. Ensuite, pour un élément quelconque g de $\Im^-(Q)$, la démonstration de l'existence d'un unique élément $f \in \Im^+(Q)$ solution de l'équation $s_\Delta \circ f = g$.

— **Les coefficients binomiaux (partie B)**

Leur propriété de symétrie, la formule du triangle de Pascal et celle du binôme de Newton sont dans l'ensemble connues des candidats. Lorsqu'ils ont été menés, les calculs à base de manipulations sur les factorielles permettant de répondre à la question **B-VI-1** l'ont été correctement. D'une manière générale, rappelons qu'il est attendu, lorsqu'on utilise un résultat de cours pour répondre à une question, de donner le nom de ce résultat (ici il était attendu de citer le triangle de Pascal et le binôme de Newton). En revanche, la référence à un résultat non universellement reconnu comme relevant du cours ne peut se substituer à une démonstration. Ainsi, le seul fait d'invoquer la formule dite d'absorption-extraction ne pouvait dispenser de la démonstration de l'égalité $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

— **L'algèbre linéaire**

- **Question B-VII-1**

Cette question a révélé, de la part de certains candidats, des incompréhensions sur le concept même de linéarité. Ainsi, pour établir que ϕ_n et ψ_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, certains candidats calculent $P(X_1 + \lambda X_2)$, affirmant même pour certains l'égalité à $P(X_1) + \lambda P(X_2)$.
Pour démontrer que ϕ_n et ψ_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, il est nécessaire de vérifier, en plus de leur linéarité que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, le degré de ses images par ϕ_n et ψ_n est inférieur ou égal à n. Cette vérification des degrés n'a été traitée que par très peu de candidats (moins de 10% de ceux qui ont abordé la question).

- **Question B-VII-3**

Rares sont les candidats ayant su interpréter l'égalité $\phi_n(B_{n,k})(X) = kB_{n,k}(X)$ en termes de vecteur propre et de valeur propre. Signalons qu'ils omettent tous de mentionner la non nullité de $B_{n,k}$, pourtant nécessaire pour conférer à $B_{n,k}$ le statut de vecteur propre. La liberté de la famille $(B_{n,k})_{0\le k\le n}$ est due au fait qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre et non pas, comme cela a été mentionné dans certaines copies, au fait que c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés, tous les polynômes $B_{n,k}$étant de degré n. L'égalité entre le nombre de polynômes $(B_{n,k})_{0\le k\le n}$ de la famille libre et la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ permet alors de conclure.

- **Question B-VII-4**

Cette question nécessite de mobiliser et d'articuler correctement des raisonnements d'algèbre linéaire figurant au programme de l'épreuve et relevant du niveau de la licence.
Tout d'abord, l'égalité $\phi_n(B_{n,0})(X) = 0$ prouve l'appartenance du polynôme $B_{n,0}$ au noyau de l'endomorphisme ϕ_n et par là-même son caractère non injectif, d'où non bijectif.
Concernant ψ_n, endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, sa bijectivité équivaut à son injectivité.
Il suffit donc de démontrer que son noyau est réduit au singleton $\{0\}$. L'utilisation de la liberté de la famille $(B_{n,k})_{0\le k\le n}$, puis le fait que le polynôme nul est le seul élément de $\mathbb{R}_n[X]$ à s'annuler en $n+1$ valeurs distinctes permettaient de conclure.
Seuls 19% des candidats ont abordé cette question qui n'a été réussie que par 26% d'entre eux.

— **Les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et les courbes paramétrées**

Rappelons que le programme de la première épreuve écrite est défini chaque année et que les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et les courbes paramétrées y ont fait leur entrée à la session 2020 (dans la rubrique « fonction de variable réelle »). Force est de constater que les parties du problème y faisant référence ont été très peu abordées, et lorsqu'elles l'ont été, sans grand succès.
On ne peut que conseiller aux futurs candidats de ne pas négliger cette notion tout à fait accessible (beaucoup plus que les fonctions de plusieurs variables qu'elle a remplacées dans le programme de la première épreuve).

- **Question F-C-VIII-3**

Seuls 19 % des candidats ont compris qu'il s'agissait de vérifier que P_0=$M(0)$ et P_n=$M(1)$.

- **Question C-XI**

On attendait ici la dérivation la fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$, puis la substitution de la variable t par les valeurs 0 ou 1 pour obtenir un vecteur tangent en P_0 ou en P_n, à condition de vérifier la non nullité des vecteurs obtenus.
7,4 % des candidats n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 92,2 % n'ont pas abordé cette question. Environ 5,7 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

- **Question E-XVIII-3-c**

Seule question du problème permettant d'évaluer le tracé d'une courbe plane paramétrée, cette question n'a été abordée que par 4,9 % des candidats.

— **Le principe de récurrence**

- **Question D-XV**

L'algorithme de construction de la suite finie de points $(M_{k,l})$ repose sur une récurrence. Le résultat de la question **D-XV-1,** qui se démontre lui-même par récurrence, permet d'exprimer le dernier point (correspondant à $l = n$) comme barycentre du système $\big((P_0, B_{n,0}), (P_1, B_{n,1}), (P_2, B_{n,2}), \dots, (P_n, n)\big)$. Cette question, préparée par la question **D-XIV-2**, nécessite un certain recul pour mener à bien le calcul (découlant de la formule du triangle de Pascal) et pour ne pas se perdre entre les différents indices.
Elle n'a été abordée que par 7,3 % des candidats, et correctement traitée uniquement par 0,6 % des candidats.
Signalons a contrario que de très nombreuses démonstrations par récurrence ont été proposées dans la question **B.V.5**. La locution « relation de récurrence » dans le titre de la question a laissé croire à de nombreux candidats qu'une démonstration par récurrence était attendue. Ainsi, ils se sont aventurés avec maladresse dans des démonstrations « par récurrence », dont la justification de l'hérédité ne mobilisait nullement l'hypothèse de récurrence. Il est attendu des candidats qu'ils soient capables de prendre du recul sur leurs propres raisonnements et d'analyser ce qu'ils utilisent réellement dans la preuve de l'hérédité d'une récurrence. Enfin, une grande partie des candidats s'engagent dans l'initialisation de la récurrence sans avoir énoncé d'hypothèse ni précisé sur quel entier elle porte. Cela rend difficile la compréhension de la démarche lorsque deux entiers (ici k et l) sont mis en jeu.
Signalons qu'il subsiste encore des candidats qui supposent l'hypothèse de récurrence valable pour tout entier naturel.

— **Les isométries du plan**

Signalons que les isométries du plan intervenaient déjà dans l'épreuve 1 du sujet de la session 2019. Le jury n'a malheureusement pas constaté d'amélioration dans la maîtrise de cette notion du programme. Rappelons qu'en géométrie comme dans les autres thèmes du programme, on attend des futurs professeurs que leurs affirmations ne se fondent pas sur ce qui « se voit » sur une figure, mais sur des argumentations basées sur le principe même de la démonstration.

Questions E-XVII-3 et E-XVII-4

Moins de 10% des candidats ont fourni, de manière uniquement descriptive et sans justification, la liste des 4 éléments du groupe $\mathfrak{I}^{+}(Q)$ et ont donné sa table. La résolution correcte de cette question supposait :

- un rappel du fait qu'une isométrie positive du plan est une rotation ;
- lorsque cette rotation n'est pas égale à l'identité, la justification que son centre est le centre du carré (la question **A-IV** assurant l'invariance, par toute isométrie de $\mathfrak{I}(Q)$, de l'isobarycentre des sommets du carré) ;

- la détermination des angles possibles pour cette rotation selon qu'elle transforme A en B, C ou D.

Si les rotations d'angles $k\frac{\pi}{2}$ $(\text{pour } k = 0, 1, 2, 3)$ sont mentionnées, le centre commun de ces rotations est rarement précisé, ce qui traduit une confusion entre rotation vectorielle et rotation affine.
Environ 2% des candidats ont ensuite fourni, toujours sans justification, les 4 réflexions qui, adjointes aux 4 rotations précédentes, constituent le groupe $\mathfrak{I}(Q)$. Un raisonnement complet nécessite d'utiliser la bijection F de la question XVII-2 pour s'assurer que l'on dispose bien de la totalité des éléments de $\mathfrak{I}(Q)$.
Les correcteurs ont valorisé les copies sur lesquelles le carré a été représenté avec des éléments (axes de symétrie, angles orientés) figurant les rotations et les symétries le préservant.

En préalable de l'étude des courbes de Bézier associées aux permutations du carré, il était demandé à la question **E-XVIII-1** de donner le cardinal de l'ensemble des permutations des 4 sommets d'un carré. Le jury a eu la mauvaise surprise de constater que seulement 10,9 % des candidats en ont fourni la valeur correcte. Pour les autres, les réponses oscillent entre 4, 8 ou 16.

4.1.b Qualité de l'argumentation et de l'expression écrite

Au-delà de la maîtrise des connaissances et des compétences mathématiques nécessaires à la résolution du problème, l'évaluation des copies porte aussi sur la qualité de l'argumentation tant au niveau de l'expression française que mathématique. Le CAPES et le CAFEP étant des concours de recrutement de futurs professeurs (qui seront donc investis d'une mission d'explicitation et de transmission des savoirs), il est naturel que l'évaluation de leurs copies accorde une place privilégiée à la clarté, la rigueur, la justesse et la précision des réponses apportées. Or, le jury déplore une nouvelle fois l'insuffisance des justifications apportées à certaines réponses. À ce titre, il est rappelé que, si certains résultats peuvent être interprétés par les candidats comme relevant du cours, lorsqu'il en est explicitement demandé une démonstration, tout résultat ne figurant pas parmi les données de l'énoncé ou non issu des questions antérieures doit être démontré. Les exemples ci-dessous illustrent plus particulièrement ce qui était attendu comme justification à certaines réponses.

- **Question A-I-2 :** la seule mention « le point $G = \frac{1}{\alpha}(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i)$ convient » ne peut être prise en compte comme preuve de l'existence du barycentre, la justification de la notation de Grassmann pour dénoter le barycentre reposant notamment sur la réponse à une question ultérieure (A-I-3).
  Au niveau du **A-I-2**, il était attendu d'utiliser la surjectivité de l'application f démontrée à la question **A-I-1-c.** Notons cependant, qu'à partir de la question **A-I-3**, et en particulier dans toute la section II, l'utilisation de la notation de Grassmann pour désigner un barycentre a été acceptée, même sans justification.
- **Question A-II-1 :** pour identifier l'isobarycentre de deux points P_0, P_1 distincts comme le milieu du segment $[P_0P_1]$, l'égalité $\overrightarrow{GP_0} + \overrightarrow{GP_1} = \vec{0}$, qui n'est qu'une paraphrase de l'énoncé, ne suffit pas si elle n'est pas accompagnée d'un dessin probant ou d'une égalité du type $\overrightarrow{P_0G} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1}$.
- **Question A-II-2** : sur cette question où il était demandé de démontrer que, pour tout réel t, le barycentre du système $((P_0, t), (P_1, 1-t))$ appartient à la droite (P_0P_1), la seule égalité de définition $t\overrightarrow{P_0G} + (1-t)\overrightarrow{P_1G} = \vec{0}$ ne suffit pas si elle n'est pas complétée par un argument de colinéarité, par exemple entre les vecteurs $\overrightarrow{P_0G}$ et $\overrightarrow{P_0\,P_1}$.
- **Question A-IV** : sur cette question demandant d'expliciter le lien entre application affine et barycentre, le passage de l'égalité $\sum_{i=0}^{n} \propto_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$ à $\sum_{i=0}^{n} \propto_i \overrightarrow{g(G)g(P_i)} = \vec{0}$ nécessite d'appliquer aux deux membres de la première égalité l'application φ_g et d'invoquer explicitement sa linéarité.
- **Question B-V-4 :** rappelons qu'il est attendu, lorsqu'on utilise un résultat de cours (ici la formule du binôme de Newton) pour répondre à une question, de donner le nom de ce résultat. Plusieurs candidats n'ont pas identifié la formule du binôme en tant que telle, et ont fait référence à la loi binomiale. Cette justification indirecte n'a été acceptée que lorsque la variable t a été interprétée comme une probabilité.

- **Question B-V-5-b** : sur la relation de récurrence, il est attendu, soit de mentionner explicitement le triangle de Pascal, soit de redémontrer l'égalité référencée sous ce nom.
- **Question B-VI-1** : pour prouver la dernière égalité (correspondant au cas $1 \leq k \leq n-1$), il est attendu de démontrer les égalités $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$. La seule référence à la « formule du pion » n'a pas été créditée de la totalité des points attribués à cette question.
- **Question B-VI-3** : l'égalité $0^k = 0$ (resp $0^{n-k} = 0$) doit être justifiée par la stricte positivité de k (respectivement de $n-k$). De manière générale, tout au long de la partie B, il fallait traiter avec précaution les cas limites $k = 0$ et $k = n$.
- **Question C-VIII**-1 : pour démontrer que le point M(t) est bien défini, il faut justifier la non nullité du poids total des coefficients.
- **Question E-XVII-1** : avant de vérifier les trois axiomes de sous-groupes, il importe de préciser dans quel groupe de référence on se place. Il est ici possible de considérer le groupe des isométries affines du plan ou celui des bijections du plan. Mais dans ce dernier cas, il faut vérifier que la composée et l'inverse d'une isométrie conservant le carré conservent le carré, mais aussi que ce sont bien des isométries (conservation des distances). Certains candidats prennent comme groupes de référence O($\wp$)ou SO($\wp$) alors que ce ne sont pas des groupes de transformations affines du plan $\wp$, (mais des groupes d'automorphismes du plan vectoriel $\vec{\wp}$).

De manière générale, il a été observé un manque de rigueur dans l'utilisation du langage mathématique : absence de quantificateurs, confusion entre équivalence et implication, succession d'égalités sans lien explicite. Les symboles d'implication et d'équivalence sont très souvent utilisés à mauvais escient, par exemple en lieu et place de la conjonction « donc » entre deux propositions énoncées en français ; a contrario, ils sont souvent absents lorsqu'ils seraient nécessaires, par exemple pour prouver l'égalité entre deux ensembles. De la même manière, certains calculs sont menés sans qu'aucun lien logique entre les différentes lignes qui le constituent ne soit indiqué.

4.1.c Structuration et présentation des copies

Si la plupart des copies sont lisiblement et correctement rédigées, faisant par exemple ressortir les résultats obtenus en les encadrant, d'autres auraient mérité davantage d'effort au niveau du soin et de la présentation : les traits doivent être tirés à la règle et les illustrations (courbes, schémas) doivent être soignées et précises (en particulier les noms des axes doivent apparaître). Sur un autre registre, il est attendu d'un futur professeur qu'il utilise un niveau de langage approprié : des expressions telles que « c'est bon » ou « ok » pour conclure une preuve n'ont pas leur place dans la copie d'un candidat à un concours de recrutement d'enseignants. Il en est de même pour l'étalage de ses états d'âme lors de la résolution d'une question : des expressions telles que « zut, cette méthode ne marche pas » sont à proscrire. En l'absence d'épreuves orales à la session 2020, le jury s'est montré particulièrement attentif à la qualité de présentation et d'organisation des copies. L'absence de structuration, les erreurs de numérotation dans les pages qui constituent la copie ou à l'intérieur des différentes questions, le désordre dans lequel les questions sont traitées augurent mal de la capacité future du candidat à concevoir des documents pédagogiques de référence et à organiser efficacement un tableau. Enfin, l'affirmation sans preuve de résultats qualifiés d'évidences ou l'utilisation du résultat de la question $n+1$ pour démonter celui de la question n ne manquent pas de laisser au correcteur une impression de tromperie, voire de douter de l'honnêteté intellectuelle du candidat. Tous les passages en force se révèlent finalement défavorables au candidat. Signalons au contraire qu'il est parfaitement légitime de poursuivre un raisonnement en s'appuyant sur un résultat non démontré mais clairement indiqué comme étant admis.

Le diagramme suivant décrit les résultats obtenus par les candidats, question par question :