Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A : logarithme de base a

Rappel. On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0,+\infty[$, dérivable, telle que :

- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$

- $f(1) = 0$.

I. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a'(x) = \frac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme néperien).

La fonction g :$]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{a}{x}$ est continue, donc possède une unique primitive s'annulant en 1.

II. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

Posons $g_a = a\ln$. Alors g_a est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$g_a'(x) = \frac{a}{x}.$$

De plus, $g_a(1) = a\ln(1) = 0$, Par unicité de f_a, $f_a = g_a = a\ln$.

III. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

Fixons $y > 0$ et considérons la fonction définie h sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = f_a(xy)$. Par composition, h est dérivable et pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = yf_a'(xy) = \frac{ay}{xy} = \frac{a}{x} = f_a'(x).$$

Par suite, il existe un nombre réel C tel que pour tout $x > 0$, $h(x) = f_a(x) + C$. Pour $x = 1$:

$$h(1) = f_a(y) = f_a(1) + C = C,$$

donc $C = f_a(y)$ et $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.

IV. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

D'après la question précédente :

$$f_a(x) + f_a\left(\frac{1}{x}\right) = f_a\left(x\frac{1}{x}\right) = f_a(1) = 0,$$

donc $f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x)$.

V. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a(x^r) = rf_a(x)$.
Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: $f_a(x^n) = nf_a(x)$. Montrons cette propriété par récurrence. Si $n = 0$, $f_a(x^0) = f_a(1) = 1 = 0f_a(x)$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors :

$$f_a(x^{n+1})) = f_a(x^n x) = f_a(x^n) + f_a(x) = nf_a(x) + f_a(x) = (n+1)f_a(x),$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit n un entier négatif. Alors, d'après ce qui précède :

$$f_a(x^n) = f_a\left(\frac{1}{x^{|n|}}\right) = -f_a(x^{|n|}) = -|n|f_a(x) = nf_a(x).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_a(x^n) = nf_a(x)$.
Soit $r \in \mathbb{Q}$. Posons $r = \frac{p}{q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, avec $y = x^{\frac{p}{q}}$:

$$qf_a(x^r) = qf_a(y) = f_a(y^q) = f_a(x^p) = pf_a(x),$$

donc $f_a(x^r) = \frac{p}{q}f_a(x) = rf_a(x)$.

VI. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc ln est strictement croissante.

VII. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.
Comme ln est croissante, ces deux limites existent. Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 2^n = +\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln(2^n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\ln(2) = +\infty,$$

car, ln étant strictement croissante, $\ln(2) > \ln(1) = 0$. Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 2^{-n} = -\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \ln(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln(2^{-n}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} -n\ln(2) = -\infty.$$

VIII. Montrer que la fonction ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Comme ln est strictement croissante et continue, ln définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \ln(x), \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x)[= \mathbb{R}$.

IX. Comment peut-on généraliser les résultats des questions VI. et VIII. au cas des logarithmes f_a ?

Comme $f_a = a \ln$:

- Si $a > 0$, f_a est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, f_a est une bijection strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : logarithme décimal

X. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$. Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$$f_a(10) = 1 \Longleftrightarrow a\ln(10) = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{\ln(10)},$$

car $\ln(10)$ est non nul, ln étant strictement croissante. Donc l'unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$ est $f_{\frac{1}{\ln(10)}}$.

XI. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\mathrm{Log}(N)$.

Alors $10^{n-1} \leqslant N < 10^n$. Comme Log est strictement croissante (question IX.) :

$$\mathrm{Log}(10^{n-1}) = (n-1)\mathrm{Log}(10) = n - 1 \leqslant \mathrm{Log}(N) < \mathrm{Log}(10^n) = n\mathrm{Log}(10)n.$$

Donc la partie entière de $\mathrm{Log}(N)$ est $n - 1$.

XII. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

> **1.** Combien le nombre 4^{2019} possède t-il de chiffres ?
>
> **2.** Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en $\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$) selon la formule
>
> $$L = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$
>
> où $I_0 = 10^{-12}\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000Hz.
>
> **a.** Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5}\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.
>
> **b.** Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10dB ?
>
> **3.** Une balle lancée d'une hauteur de 2m atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1mm. Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

1. Posons $N = 4^{2019}$. Alors le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 de N est la partie entière de $\mathrm{Log}(N)$ augmentée de 1. De plus, $\mathrm{Log}(N) = \mathrm{Log}(4^{2019}) = 2019\mathrm{Log}(4) \approx 1215,6$, à 10^{-1} près. Donc le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 de N est 1216.

2. a. Si $I = 10^{-5}\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, on obtient :

$$L = 10\mathrm{Log}\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) 10\mathrm{Log}(10^7) = 70\mathrm{Log}(10) = 70.$$

2.b. Soit I l'intensité de départ et I' l'intensité après augmentation du niveau sonore de dB. En notant L le niveau sonore de départ et L' le niveau sonore après augmentation de dB, on a $L' = L + 10$, donc :

$$\begin{aligned}
10\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) &= 10\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) + 10 \\
\iff \text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) - \text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) &= 1 \\
\iff \text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) + \text{Log}\left(\frac{I_0}{I}\right) &= 1 \\
\iff \text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\frac{I_0}{I}\right) &= 1 \\
\iff \text{Log}\left(\frac{I'}{I}\right) &= \text{Log}(10).
\end{aligned}$$

Comme la fonction Log est bijective,

$$\frac{I'}{I} = 10.$$

L'intensité sonore est multipliée par 10.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est la hauteur atteinte au n-ième rebond, exprimée en mètre. Alors $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7u_n$. Il s'agit donc d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $0,7$ et par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times 0,7^n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction Log est strictement croissante :

$$\begin{aligned}
u_n < 10^{-3} &\iff 2 \times 0,7^n < 10^{-3} \\
&\iff \text{Log}(2 \times 0,7^n) < \text{Log}(10^{-3}) \\
&\iff \text{Log}(2) + n\text{Log}(0,7) < -3 \\
&\iff n > \frac{-3 - \text{Log}(2)}{\text{Log}(0,7)} \text{ (car Log}(0,7) < 0) \\
&\iff n > 21,3 \\
&\iff n \geqslant 22 \text{ (car } n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

La balle s'arrête après 22 rebonds.

Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

XIII. Montrer que pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

Comme $-x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - (-1^n)\frac{1}{1+x},$$

d'où le résultat.

XIV. En déduire que pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.$$

En conséquence, si $x > -1$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x t^k \mathrm{d}t + \int_0^x (-1)^k \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

XV. On suppose que $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{1+t} \leqslant \dfrac{1}{1+0} = 1$, donc :

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x \left| (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \right| \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

XVI. On suppose que $-1 < x \leqslant 0$. Montrer que

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

Pour tout $t \in [x, 0]$:

$$\left| \frac{t^n}{1+t} \right| = \frac{|t|^n}{1+t} \leqslant \frac{|t|^n}{1+x} = (-1)^n \frac{t^n}{1+x}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_x^0 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_x^0 (-1)^n \frac{t^n}{1+x} \mathrm{d}t \\
&\leqslant -\frac{1}{1+x} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

XVII. En déduire que, si $-1 < x \leqslant 1$, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0.$$

Si $-1 < x < 0$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = 0.$$

Dans les trois cas, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t = 0,$$

ce qui implique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x).$$

XVIII. Justifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

Dans ce cas, le terme général ne tend pas vers 0.

XIX. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de n pour laquelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

1. $x = \dfrac{1}{3}$.
2. $x = \dfrac{1}{8}$.
3. $x = 1$.

D'après la question XV, si $x > 0$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \ln(1+x) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Il suffit donc de trouver n tel que $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant 10^{-8}$. pour $x = 1$ on obtient $n = 10^8 - 1$. Pour $x = \dfrac{1}{3}$, à l'aide de la calculatrice on obtient $n = 14$; pour $x = \dfrac{1}{8}$, on obtient $n = 7$.

Remarque : 7 et 14 sont les meilleurs valeurs possibles pour $x = \dfrac{1}{8}$ et $x = \dfrac{1}{3}$. Pour $x = 1$, la meilleure valeur possible est 49 997 752.

XX. **1.** Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

C'est la question XVII pour $x = 1$.

2. Soit p un entier naturel non nul. On considère $R_p = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que

$$R_p = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

$$\begin{aligned}
R_p &= \lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=2p+1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) \\
&= \lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{2k+2-2k-1}{(2k+2)(2k+1)} \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.
\end{aligned}$$

3. Soit N un entier naturel non nul. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Si $p \leqslant k \leqslant N$, $0 < (2k+1)^2 \leqslant (2k+1)(2k+2) \leqslant (2k+2)^2$, ce qui implique le résultat par passage à l'inverse.

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}.$$

Soit $k \in N$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+a)^2}$ décroît sur $[k, k+1]$ et donc :

$$\frac{1}{(2(k+1)+a)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{(2x+a)^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2k+a)^2}.$$

En sommant la première inégalité pour k de $p-1$ à $N-1$:

$$\sum_{k=p-1}^{N-1} \frac{1}{(2(k+1)+a)^2} = \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}.$$

En sommant la première inégalité pour k de p à N :

$$\int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

On prend $a = 2$ et on obtient, pour tout $N \geqslant p$:

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \geqslant \int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+2)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{N+1} \right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$:

$$R_p \geqslant \frac{1}{4p+4}.$$

On prend $a = 1$ et on obtient, pour tout $N \geqslant p$:

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2N+1}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$:

$$R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{4p}{4p+4} \leqslant 4pR_p \leqslant \frac{4p}{4p-2}.$$

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} 4pR_p = 1$, donc R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

XXI. On se propose de calculer des approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 2\ln(2) - \ln(3).$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{8}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right) = -3\ln(2) + 2\ln(3).$$

Par suite :

$$2\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) = \ln(2),$$
$$3\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + 2\ln\left(1+\frac{1}{8}\right) = \ln(3).$$

2. Les calculs de la question XIX. ont donné les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \qquad \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \approx 0,11778304.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

Avec la calculatrice, on obtient :

$$\ln(2) \approx 0,69314718 = \alpha, \qquad \ln(3) \approx 1,09861229 = \beta.$$

De plus :

$$\begin{aligned}|\ln(2)-\alpha| &\leqslant 2\left|\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)-0,28768207\right|+\left|\ln\left(1+\frac{1}{8}\right)-0,11778304\right|\\ &\leqslant 3\times 10^{-8}.\end{aligned}$$

De même, $|\ln(3)-\beta|\leqslant 5\times 10^{-8}$.

XXII. Montrer que pour tout $x\in]-1,1[$ et pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\int_0^x\frac{t^{2n}\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Pour tout entier naturel p :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)&=\ln(1+x)-\ln(1-x)\\ &=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}-\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\\ &+\int_0^x(-1)^p\frac{t^p}{1+t}\mathrm{d}t-\int_0^{-x}(-1)^p\frac{t^p}{1+t}\mathrm{d}t\\ &=\sum_{k=0}^{p-1}\left((-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\\ &+\int_0^x(-1)^p\frac{t^p}{1+t}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{t^p}{1-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Soit n un entier naturel. Pour $p=2n$:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+2\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

XXIII. En déduire que si $x\in[0,1[$, alors

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\leqslant\frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Par suite :

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\leqslant\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV. **1.** Quelle valeur de x doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?

Soient $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x}=y &\Longleftrightarrow 1+x=y-xy\\ &\Longleftrightarrow x(1+y)=y-1\\ &\Longleftarrow x=\frac{y-1}{y+1}.\end{aligned}$$

Par suite, pour obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$, on prend $x=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$; pour obtenir une valeur approchée de $\ln(3)$, on prend $x=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}$.

2. À l'aide de ces valeurs de x, donner une valeur de n permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.

Il suffit de choisir n tel que

$$\frac{2}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} < 10^{-8}.$$

Pour $\ln(2)$, avec l'aide de la calculatrice on montre que $n = 7$ convient. Pour $\ln(3)$, $n = 11$ convient.

3. Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ avec celle de la question XXI.

Avec cette méthode, on calcule 7 termes d'une série pour $\ln(2)$ et 11 pour $\ln(3)$, soit en tout 18 termes. Avec la méthode de la question XXI, il faut calculer $14+7 = 21$ termes d'une série (question XIX) qu'on combine ensuite : la méthode de la question XXI est moins efficace.

XXV. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.

En décomposant n en produit de nombres premiers, on peut exprimer $\ln(n)$ comme combinaison à coefficients entiers de $\ln(p)$ avec p premiers.

2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 20$.

On connaît déjà des valeurs approchées de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. On utilise ensuite la méthode de la question XXIV :

— $p = 5$: on prend $x = \dfrac{2}{3}$.

— $p = 7$: on prend $x = \dfrac{3}{4}$.

— $p = 11$: on prend $x = \dfrac{5}{6}$.

— $p = 13$: on prend $x = \dfrac{6}{7}$.

— $p = 17$: on prend $x = \dfrac{8}{9}$.

— $p = 19$: on prend $x = \dfrac{9}{10}$.

On obtient ensuite les autres valeurs :

$$\begin{array}{rrr}
\ln(4) = 2\ln(2), & \ln(6) = \ln(2)+\ln(3), & \ln(8) = 3\ln(2), \\
\ln(9) = 2\ln(3), & \ln(10) = \ln(2)+\ln(5), & \ln(12) = 2\ln(2)+\ln(3), \\
\ln(14) = \ln(2)+\ln(7), & \ln(15) = \ln(3)+\ln(5), & \ln(16) = 4\ln(2), \\
\ln(18) = \ln(2)+2\ln(3), & \ln(20) = 2\ln(2)+\ln(5). &
\end{array}$$

Problème n° 2

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté $\mathbb{Q}^+$.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

On rappelle que, pour tout élément x non nul de $\mathbb{Q}^+$, il existe un unique couple (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x = \dfrac{a}{b}$. Le quotient $\dfrac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de x. Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\dfrac{0}{1}$.

Partie A : Somme des cancres

Définition. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$. Leur FFI respectives sont notées $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ (a, b, c, d sont des entiers naturels, b et d sont non nuls, a et b sont premiers entre eux, c et d sont premiers entre eux). La somme des cancres de x et y est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}.$$

I. Question de cours. Soient a, b, n trois entiers relatifs, a et b étant non nuls. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(a, b + na)$.
Posons $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$ et $d' = \mathrm{PGCD}(a, b+na)$. Comme d divise a et b, alors d divise $b+na$. Par définition de d', d' divise d. Comme d' divise a et $b+na$, d' divise également $b + na - na = b$. Par définition de d, d divise d'. Donc $d = d'$.

II. Soient x et y deux rationnels positifs.

1. Montrer que $x \oplus y$ est un rationnel positif.
Si $\dfrac{a}{b}$ est la FFI de x et $\dfrac{c}{d}$ la FFI de y, comme $a, c \in \mathbb{N}$, $a+c \in \mathbb{N}$. Comme $b, d \in \mathbb{N}^*$, $b + d \in \mathbb{N}^*$. Donc $x \oplus y \in \mathbb{Q}^+$.

2. On note $\dfrac{a}{b}$ la FFI de x et $\dfrac{c}{d}$ la FFI de y. La FFI de $x \oplus y$ est-elle toujours $\dfrac{a+c}{b+d}$?

Pas nécessairement. Par exemple, si $x = \dfrac{1}{3}$ et $y = \dfrac{1}{5}$,

$$x \oplus y = \frac{1+1}{3+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

III. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus 0 = x$.
C'est faux. Par exemple

$$\frac{1}{3} \oplus 0 = \frac{1+0}{3+1} = \frac{1}{4}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus x = x$.
C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x :

$$x \oplus x = \frac{a+a}{b+b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = x.$$

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus y = y \oplus x$.
C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et Si $\frac{c}{d}$ la FFI de y :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c+a}{d+b} = y \oplus x.$$

4. Pour tous $x, y, z, \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.
C'est faux. Par exemple :

$$\left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}\right) \oplus \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \oplus \frac{1}{5} = \frac{3}{10},$$
$$\frac{1}{2} \oplus \left(\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

5. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$.

C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et si $\frac{c}{d}$ la FFI de y, alors la FFI de $\frac{1}{x}$ est $\frac{b}{a}$ et celle de $\frac{1}{y}$ est $\frac{d}{c}$.

$$\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{1}{x \oplus y}.$$

6. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, pour tout entier naturel n, $(n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$.
C'est vrai. Notons $\frac{a}{b}$ la FFI de x. D'après la première question, $\text{PGCD}(a+bn, a) = 1$, donc la FFI de $n+x$ est $\frac{a+bn}{b}$. Par suite, en notant $\frac{c}{d}$ la FFI de y :

$$(n+x) \oplus (n+y) = \frac{a+bn+c+dn}{b+d} = \frac{a+b}{c+d} + n = n + (x \oplus y).$$

IV. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$.

1. Montrer que $x \oplus y = x$ si, et seulement si, $x = y$.
Si $x = y$, d'après la question III.2, $x \oplus y = x \oplus x = x$. Supposons $x \oplus y = x$. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et si $\frac{c}{d}$ la FFI de y, alors

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b},$$

donc $ab + bc = ab + ad$ et donc $bc = ad$ et finalement $x = y$.

2. Montrer que si $x < y$, alors $x < x \oplus y < y$.
Si $\dfrac{a}{b}$ est la FFI de x et si $\dfrac{c}{d}$ la FFI de y,

$$y - x = \frac{bc - ad}{bd} > 0,$$

donc $bc - ad > 0$. En conséquence :

$$x \oplus y - x = \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0,$$
$$y - x \oplus y = \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc + cd - ad - cd}{d(b+d)} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} > 0.$$

Donc $x < x \oplus y < y$.

V. Interprétation géométrique. On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère (O, I, J). Pour $x \in \mathbb{Q}^+$, de FFI $\dfrac{a}{b}$, on note M_x le point de coordonnées (b, a).

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls. Montrer que O, $M_{x\oplus y}$ et le milieu de $[M_x M_y]$ sont alignés.
Soit $\dfrac{e}{f}$ la FFI de $x \oplus y$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{N}^*$, tel que $a + c = \lambda e$ et $b + d = \lambda f$.
Dans le repère (O, I, J) :

$$O : (0,0), \qquad M_x : (b, a), \qquad M_y : (d, c), \qquad M_{x\oplus y} : (f, e) = \frac{1}{\lambda}(b + d, a + c).$$

Les coordonnées du milieu N de $[M_x M_y]$ sont $\dfrac{1}{2}(b + d, a + c)$. On constate que les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OM_{x\oplus y}}$ sont colinéaires, donc O, N et $M_{x\oplus y}$ sont alignés.

2. Qu'est la droite $(OM_{x\oplus y})$ pour le triangle $OM_x M_y$?
Il s'agit de la médiane issue de O.

VI. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, de FFI respectives $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$. On suppose que $a > c$ et $b < d$. En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle $OM_x M_y$ est

$$\frac{ad - bc}{2}.$$

Soient A, B, C, D et E les points de coordonnées respectives $(0, a)$, $(b, 0)$, $(0, c)$, $(d, 0)$ et (d, a). En notant $\mathcal{A}$ l'aire recherchée :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathrm{Aire}(ODEA) - \mathrm{Aire}(ODM_x) - \mathrm{Aire}(M_y E M_x) - \mathrm{Aire}(OM_x A) \\
&= ad - \frac{cd}{2} - \frac{(a-c)(b-d)}{2} - \frac{ab}{2} \\
&= \frac{ad - bc}{2}.
\end{aligned}$$

Partie B : suites de Farey

Définition : pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite de Farey d'ordre n est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à n. On note F_n cette suite. Par exemple :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right).$$

VII. Déterminer F_4, F_5 et F_6.

$$F_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right),$$

VIII. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ et soit n un entier naturel non nul. Montrer que x est un terme de la suite F_n si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{N}$, b non nul, tels que $x = \frac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

$\Longrightarrow$. Soit $\frac{a}{b}$ la FFI de x. Alors $a, b \in \mathbb{N}$, b et non nul et $0 \leqslant b \leqslant n$. De plus, comme $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant a \leqslant b$.

$\Longleftarrow$. Alors x est un rationnel et $x \in [0, 1]$. Soit $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$, $a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$. La FFI de x est $\frac{a'}{b'}$ et $b' \leqslant b \leqslant n$. Donc x apparaît dans la suite F_n.

IX. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les termes de F_n sont aussi des termes de F_{n+1}.

Si x apparaît dans F_n, sa FFI est $\frac{a}{b}$, avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$. Alors $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n+1$. D'après la question précédente, x apparaît dans F_{n+1}.

X. Montrer que si x est un terme de la suite F_n alors $1 - x$ également.
Soit $\frac{a}{b}$ la FFI de x. Alors $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$. Alors :

$$1 - x = \frac{b-a}{b}.$$

D'après la question VIII, $1 - x$ est un terme de F_n.

XI. On considère l'application suivante :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{Q}^+ & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \mapsto & (a, b) \text{ tel que } \frac{a}{b} \text{ est la FFI de } x. \end{array} \right.$$

1. Montrer que θ est injective.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$ tels que $\theta(x) = \theta(y) = (a, b)$. Alors $x = \dfrac{a}{b} = y$.

2. Montrer que θ n'est pas surjective.
Indication : on pourra montrer que $(2, 2)$ n'appartient pas à $\theta(\mathbb{Q}^+)$.

Si $(a, b) \in \theta(\mathbb{Q}^+)$, alors $\dfrac{a}{b}$ est la FFI d'un certain rationnel positif, donc $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$. Or $\mathrm{PGCD}(2, 2) = 2$, donc $(2, 2) \notin \theta(\mathbb{Q}^+)$. L'application θ n'est pas surjective.

3. Soit x un élément de la suite F_n, non nul. Montrer que $\theta(x) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.

La FFI de x est notée $\dfrac{a}{b}$. Comme x est un terme de F_n non nul, $0 < x \leqslant 1$, donc $0 < a \leqslant b \leqslant n$. Donc $\theta(x) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.

4. On note f_n le nombre de termes de F_n. Montrer que $f_n \leqslant n^2 + 1$ et que l'égalité n'est satisfaite que si $n = 1$.

Soit X_n l'ensemble des termes non nuls de f_n. Comme θ est injectif, $|\theta(X_n)| = |X_n| = f_n - 1$. De plus, comme $\theta(X_n) \subseteq [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, $f_n - 1 \leqslant n^2$.
Si $n = 1$, $f_1 = 2 = 1 + 1^2$. Supposons $n \geqslant 2$. Comme $(2, 2)$ n'est pas dans $\theta(\mathbb{Q}^+)$,

$$\theta(X_n) \subseteq [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!] \setminus \{(2, 2)\}.$$

Donc $|\theta(X_n)| = f_n - 1 \leqslant n^2 - 1$ et $f_n < 1 + n^2$.

XII. Soit n un entier naturel non nul. L'indicatrice d'Euler de n est l'entier défini par

$$\varphi(n) = \mathrm{card}(\{k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{PGCD}(k, n) = 1\}).$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

En séparant les termes de F_n selon le dénominateur de leur FFI et séparant le terme 0 :

$$f_n = 1 + \sum_{b=1}^{n} |\{a \in [\![1, n]\!],\ 1 \leqslant a \leqslant b,\ \mathrm{PGCD}(a, b) = 1\}| = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

XIII. Soit n un entier naturel non nul et soient x et y deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}. On suppose qu'aucun des deux n'est un terme de F_n.

1. Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $x = \dfrac{k}{n+1}$ et $y = \dfrac{k+1}{n+1}$.

Soit $\dfrac{k}{b}$ la FFI de x. Comme x est un terme de F_{n+1}, $0 \leqslant k \leqslant b \leqslant n + 1$. Comme x n'est pas un terme de F_n, $b > n$ donc $b = n + 1$. De même, la FFI de y est de la forme $\dfrac{l}{n+1}$. Comme $x < y$, $k < l$. Si $l > k + 1$, alors $\dfrac{k+1}{n+1}$ est un terme de F_{n+1} intercalé entre x et y, alors que x et y sont consécutifs dans F_{n+1}. Donc $l = k + 1$.

2. Montrer que $x < \frac{k}{n} < y$.

$$\frac{k}{n} - x = \frac{k}{n} - \frac{k}{n+1} > 0,$$
$$y - \frac{k}{n} = \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n(n+1)}.$$

Comme $y \leqslant 1$, $k+1 \leqslant n+1$, donc $n-k \geqslant 0$. Si $n = k$, alors $y = \frac{n}{k} = 1$ et y apparaît dans F_1 et donc dans F_n, ce qui est une contradiction. Donc $n-k > 0$ et finalement $x < \frac{k}{n} < y$.

3. Montrer que si x et y sont deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}, alors au moins l'un des deux est un élément de F_n.

Si ni x ni y n'apparaissent dans F_n, d'après la question précédente, il existe un rationnel de la forme $z = \frac{k}{n}$ tel que $x < z < y$. D'après la question IX, z est un terme de F_n et donc de F_{n+1} qui s'intercale entre x et y : c'est une contradiction. Donc x ou y est un terme de F_n.

XIV. Le but de cette question est de démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) : « si x et y sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey F_n, dont les FFI respectives sont $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre m strictement supérieur à n. »

1. Démontrer (P_1).

Comme $F_1(0, 1)$, le seul cas à considérer est $x = 0$ et $y = 1$, ce qui donne $a = 0$, $c = 1$, $b = d = 1$. Alors $bc - ad = 1$. De plus, le premier terme à s'intercaler entre x et y dans une suite de Farey d'ordre > 1 est $\frac{1}{2}$ (qui apparaît dans F_2) et on a bien $\frac{1}{2} = 0 \oplus 1$.

2. On suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) est vraie. Soit alors x et y deux termes consécutifs (dans cet ordre) de F_{n+1}, dont les FFI respectives sont $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On rappelle que, dans ce cas, x ou y est un élément de F_n.

a. Montrer que si x et y sont des éléments de F_n, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n + 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $bc - ad = 1$ et la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à n est $x \oplus y$. Comme aucune fraction n'apparaît entre x et y dans F_{n+1} par hypothèse, cette fraction apparaît dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n + 1$.

b. On suppose dans tout ce qui suit que x est un terme de F_n et que y n'est pas un terme de F_n. Soit z le successeur de x dans F_n et $z = \frac{r}{s}$ la FFI de z. Montrer que $\frac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible comprise entre x et z.

D'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $rb - as = 1$. Donc :

$$rb - as = r(b+s) - (a+r)s = 1.$$

Par le théorème de Bézout, PGCD$(a+r, b+s) = 1$, donc la fraction $\dfrac{a+r}{b+s}$ est irréductible. D'après la question IV.2 :

$$x < \frac{a+r}{b+s} = x \oplus z < z.$$

c. Montrer que $x < y < z$ puis que $y = x \oplus z$.

Comme z apparaît dans F_n, elle apparaît dans F_{n+1} aussi. Comme le successeur de x dans F_{n+1} est y et que $z > x$, z apparaît après y, donc $x < y < z$. Il n'y a aucun autre terme entre x et z que y dans F_{n+1} : sinon, comme il n'y a aucun terme entre x et z dans F_n, aucun de ces termes n'est dans F_n et on aurait deux termes consécutifs de F_{n+1} dont aucun n'est dans F_n, ce qui contredit la question XIII. Donc y est la première fraction à apparaître entre x et z dans une suite de Farey d'ordre $> n$. Par l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $y = x \oplus z$.

d. En déduire que $c = a + r$ et $d = b + s$.

La FFI de y et de $x \oplus z$ sont donc les mêmes : par la question b, $c = a + r$ et $b = d + s$.

e. Déduire que $bc - ad = rd - sc = 1$.

$$\begin{aligned} bc - ad &= (a+r)b - a(b+s) = br - as = 1, \\ rd - sc &= r(b+s) - s(a+r) = rb - as = 1. \end{aligned}$$

f. Soit $\dfrac{p}{q}$ la première fraction irréductible qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey F_m d'ordre strictement m supérieur à $n+1$. On pose $u = qc-pd$ et $v = pb - aq$. Montrer que u et v sont des entiers naturels non nuls et que

$$\begin{cases} au + cv &= p, \\ bu + dv &= q. \end{cases}$$

Par définition :

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d},$$

donc $qc - pd > 0$ et $pb - aq > 0$. Donc u et v sont des entiers naturels non nuls. De plus :

$$\begin{aligned} au + cv &= aqc - apd + pbc - aqc = (bc - ad)p = p, \\ bu + dv &= qbc - pbd + pbd - abq = (bc - ad)q = q. \end{aligned}$$

g. Déduire que $x \oplus y$ apparaît dans une suite $F_{m'}$ avec $n + 1 < m' \leqslant m$ et que

$$x < x \oplus y < y.$$

D'après la question IV. 2, $x < x \oplus y < y$. De plus, comme $u, v \in \mathbb{N}^*$,

$$m \geqslant q = bu + dv \geqslant b + d.$$

Donc $x \oplus y$ apparaît dans $F_{m'}$ avec $m' \leqslant m$.

h. En déduire que $x \oplus y = \dfrac{p}{q}$.

Si $m' < m$, $x \oplus y$ s'intercale entre x et y avant $\dfrac{p}{q}$: ceci contredit la définition de $\dfrac{p}{q}$. Donc $m' = m$. Comme deux termes consécutifs de F_m ne peuvent pas tous deux ne pas appartenir à F_{m-1}, un seul terme s'intercale entre x et y dans F_m, donc $\dfrac{p}{q} = x \oplus y$.

3. Conclure.

Pour terminer la démonstration de l'hérédité, d'après la question XII, il reste le cas où x n'est pas un terme de F_n et y est un terme de F_n. On applique le résultat obtenu précédemment à $x' = 1 - y$ et $y' = 1 - x$ et cela termine la preuve de l'hérédité. Le résultat est donc vrai à tout rang n par le principe de récurrence.

XV. Applications.

1. Montrer que si $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont les FFI de deux termes successifs d'une suite de Farey F_n, alors $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.

D'après la question XIV, $bc - ad = 1$ et donc :

$$b(a+c) - a(b+d) = ab + bc - ab - ad = bc - ad = 1.$$

Par le théorème de Bézout, $\mathrm{PGCD}(a+c, b+d) = 1$ et donc $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

2. Soient x, y et z trois termes consécutifs d'une suite de Farey F_n de FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$. Montrer que $bc - ad = de - fc$ puis que $y = x \oplus z$.

D'après la question précédente, $bc - ad = de - cf = 1$. Par suite :

$$\frac{c}{d} - \frac{a+e}{b+f} = \frac{bc + cf - ad - de}{d(b+f)} = \frac{(bc - ad) + (cf - de)}{d(b+f)} = 0.$$

Donc $y = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+e}{b+f} = x \oplus z$.