Exercices - Capes 2018 - première épreuve option Mathématiques : corrigé

Avertissement : Ceci n'est pas une correction *in extenso* du problème de capes. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Ce problème est un scandale ! Je passe sur la première phrase du sujet (Le sujet est comporte cinq parties). Le plus grave est la première question, qui ne peut pas être résolue en l'état : il faut absolument supposer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, ce qui n'est pas dit explicitement dans l'énoncé. Cela a perturbé plus d'un candidat ! Sinon, le théorème porte sur les suites et les séries (beaucoup), sur l'intégration et les séries entières (un peu), sur l'arithmétique (développement dyadique), et demande l'écriture de plusieurs algorithmes.

Partie A

I.1. On a (a_n) qui est croissante et $(-b_n)$ qui est aussi croissante. La somme de deux suites croissantes est une suite croissante et donc $(a_n - b_n)$ est une suite croissante qui converge vers 0. Or, si (u_n) est une suite croissante qui converge vers ℓ, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq \ell$. Puisque $(a_n - b_n)$ converge vers 0 (c'est ici qu'on est obligé de supposer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes), on a $a_n - b_n \leq 0$.

I.2. On nous demande donc de redémontrer les résultats du cours concernant les suites adjacentes. La suite (a_n) est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leq b_n$. Attention ! Ceci ne suffit pas à établir que (a_n) est majorée. On veut une inégalité où le terme apparaissant à droite ne dépend pas de n ! ! ! Mais puisque (b_n) est décroissante, on sait aussi que $b_n \leq b_0$. Ainsi, on a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_0$. La suite (a_n) est croissante, majorée, elle converge vers ℓ_1. De même on prouve que la suite (b_n) est décroissante, minorée, et donc converge vers ℓ_2. Donc $(a_n - b_n)$ converge vers $\ell_1 - \ell_2$. Par unicité de la limite, $\ell_1 - \ell_2 = 0$ donc $\ell_1 = \ell_2$ qu'on notera dorénavant ℓ. Le fait que $a_n \leq \ell \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une conséquence du résultat rappelé à la question précédente.

I.3. Supposons qu'il existe un entier p avec $a_p \geq \ell$. Alors on a $a_{p+1} > l$ puisque la suite (a_n) est strictement croissante. D'autre part, pour tout $n \geq p+1$, on a $a_n \geq a_{p+1}$. Passant à la limite dans cette inégalité, on trouve $\ell \geq a_{p+1} > \ell$ ce qui est manifestement une contradiction. Donc pour tout entier n, on a $a_n < \ell$. Rappelons que le passage à la limite dans les inégalités ne préserve que les inégalités larges....

II.1. La suite (a_n) est clairement croissante. De plus, pour tout $n \geq 1$, on a

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}.$$

On réduit tout au même dénominateur et on trouve

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n \times (n+1) \times (n+1)!} = \frac{-1}{n \times (n+1) \times (n+1)!} \leq 0.$$

La suite (b_n) est donc décroissante. De plus, il est évident que $(a_n - b_n)$ tend vers 0. Donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

II.2. L'indication n'est pas le moyen le plus court pour résoudre cette question. Le résultat est en effet une application directe de la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle entre 0 et 1. La formule de Taylor avec reste intégral se démontre par récurrence. L'indication de l'énoncé propose donc de la redémontrer dans ce cas particulier. Pour $n \geq 1$, notons donc

$$\mathcal{P}(n) = \text{''}\ e - a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt.\text{''}$$

Initialisation : On a

$$\int_0^1 (1-t)^0 e^t dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - 1 = e - a_1.$$

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est donc vérifiée.
Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée. Réalisons une intégration par parties sur l'intégrale en dérivant e^t et en intégrant $(1-t)^n$:

$$\begin{aligned} e - a_n &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \\ &= \frac{1}{n!}\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}e^t\right]_0^1 + \frac{1}{n! \times (n+1)}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt. \end{aligned}$$

Réarrangeant les termes, on prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
En conclusion par le principe de récurrence, on sait que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

II.3. On va avoir besoin du résultat suivant : si h est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, $h \geq 0$, et si $\int_a^b h(t)dt = 0$, alors h est identiquement nulle sur $[a,b]$. Ce théorème admet le corollaire suivant : si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$, et s'il existe un réel $x_0 \in [a,b]$ avec $f(x_0) < g(x_0)$, alors $\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt$ (appliquer le premier résultat à $h = g - f$). Ici, dans notre cas, on a que pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)^n e^t \geq 0$ et cette inégalité est même stricte si $t \in [0,1[$. D'après le rappel, on a $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt > 0$, et donc $e - a_n > 0$. D'autre part, posons $u(t) = (1-t)e^t$. Alors u est dérivable et $u'(t) = -te^t < 0$ si $t > 0$. Ainsi, u est strictement décroissante sur $[0,1]$ Comme $u(0) = 1$, on en déduit que pour tout $t \in [0,1]$, on a $u(t) \leq 1$ et l'inégalité est même stricte si $t \in]0,1]$. Maintenant, en multipliant par $(1-t)^{n-1}$ (qui est positif), on obtient que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$(1-t)^n e^t \leq (1-t)^{n-1}$$

avec inégalité stricte si $t \in]0,1]$. Toujours par le rappel, on a

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt < \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n}.$$

L'autre inégalité demandée s'en découle. Remarquons que la rédaction de cette question est loin d'être facile (à cause des inégalités strictes) si on veut être précis partout.

II.4 Il suffit de trouver n tel que $n \times n! > 10^5$. La valeur $n = 10^5$ convient ! Bien sûr, ce n'est pas la meilleure possible, mais l'énoncé demande juste une valeur de n alors... Si on cherche la plus petite possible, on calcule $n \times n!$ à la calculatrice jusqu'à ce qu'on dépasse 10^5. On n'a pas à attendre longtemps, $n = 8$ convient...

II.5.a. Si on suppose que e est rationnel, alors il existe des entiers naturels non nuls p et q tels que $e = p/q$. Clairement, $e \times q! = p \times (q-1)!$ est un entier naturel.

II.5.b. Pour $q \geq p$, on a $q!/p!$ qui est un entier naturel...

II.5.c. On a $x = q!(e - a_q)$. D'après le résultat de la question II.3. on a

$$0 < x < \frac{q!}{q \times q!} = \frac{1}{q} \leq 1.$$

II.5.d. L'inégalité précédente ne peut avoir lieu puisque x est un entier naturel. C'est donc que l'hypothèse émise est fausse. Le nombre réel e n'est pas rationnel.

III.1. Pour tout $x \in]-1,1[$, la formule donnant la somme d'une suite géométrique nous dit que, pour tout $N \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^n = \frac{1 - (-1)^{N+1} x^{N+1}}{1+x}.$$

On fait ensuite tendre N vers l'infini car (x^{N+1}) tend vers 0 et on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est donc développable en série entière sur $]-1,1[$. De plus, puisque la série $\sum_n (-1)^n x^n$ converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$, le rayon de convergence de la série entière est 1. On aurait bien sûr pu (comme la majorité des candidats qui ont traité cette question !) calculer le rayon de convergence de la série entière en utilisant la règle de Hadamard. J'ai préféré revenir à la définition du rayon de convergence.

III.2. On utilise le théorème suivant : Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit F une primitive de f. Alors, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$F(x) = F(0) + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

On applique ce théorème avec $f(x) = \frac{1}{1+x}$ dont une primitive est la fonction $\ln(1+x)$.

III.3. C'est du pur calcul ! On a

$$S_{2n+2}(x) - S_{2n}(x) = \frac{-x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

Or, puisque $x \in [0,1]$, on a $x^{2n+1} \geq x^{2n+2}$ et donc

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \geq \frac{x^{2n+1}}{2n+2} \geq \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

Ceci démontre que $(S_{2n}(x))$ est décroissante. On démontre exactement de la même façon que $(S_{2n+1})(x)$ est croissante, et il est trivial que $(S_{2n}(x) - S_{2n+1}(x))$ tend vers 0.

III.4. Puisque la suite $(S_n(x))$ converge vers $\ln(1+x)$ pour $x \in [0,1[$, il en est de même des suites extraites $(S_{2n}(x))$ et $(S_{2n+1}(x))$. Le résultat est alors une conséquence de la question I.2.

III.5. Les fonctions $x \mapsto S_{2n}(x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto S_{2n+1}(x)$ sont continues sur l'intervalle $[0,1]$. On peut faire tendre x vers 1 dans le résultat de la question précédente, et on obtient le résultat demandé.

III.6. Puisque les suites $(S_{2n}(1))$ et $(S_{2n+1}(1))$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite ℓ, et passant à la limite dans la question précédente, on trouve qu'elles convergent vers $\ln 2$. De plus, si (u_n) est une suite, et si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ. Donc on a bien que $(S_n(1))$ converge vers $\ln 2$, ce qui est le résultat demandé. On aurait aussi pu invoquer le critère des séries alternées pour prouver que $(S_n(1))$ converge.

Partie B

IV.1. Puisque $d_{n-1} = 1$, on a $N \geq d_{n-1}2^{n-1} = 2^{n-1}$. D'autre part,

$$N \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1.$$

IV.2. On écrit

$$N = d_0 + 2q \text{ avec } q = \sum_{k=1}^{n-1} d_k 2^{k-1} \in \mathbb{N}.$$

Puisque $d_0 \in \{0,1\}$, on a bien écrit la division euclidienne de N par 2 et d_0 est le reste dans cette division.

IV.3. Supposons que $(d_0, \dots, d_{n-1})$ et $(c_0, \dots, c_{m-1})$ sont deux suites de chiffres possibles pour écrire N. A priori, on ne sait pas que $n = m$. Mais la question IV.1. nous dit que $2^{n-1} \leq N \leq 2^n - 1 < 2^n$ et que $2^{m-1} \leq N < 2^m$. Ceci impose que $n = m$ (si $n < m$, on aurait $N < 2^n \leq 2^{m-1} \leq N$, une contradiction). Ensuite, puisque d_0 et c_0 sont égaux au reste dans la divison par 2 de N, on a $d_0 = c_0$. Posons ensuite $N_1 = (N - d_0)/2$. Alors N_1 s'écrit

$$N_1 = \sum_{k=0}^{n-2} d_{k+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n-2} c_{k+1} 2^k.$$

On obtient alors que d_1 et c_1 sont égaux au reste dans la division euclidienne de N_1 par 2 et donc que $c_1 = d_1$. De proche en proche, on prouve que $c_k = d_k$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$. Cette rédaction n'est pas totalement satisfaisante et suggère de faire une récurrence. Pour $N \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(N) =$"Il existe une unique suite d'entiers $(d_0, \dots, d_{n-1})$ avec $d_k \in \{0,1\}$, $d_{n-1} = 1$ tel que $N = \sum_{k=0}^{N-1} d_k 2^k$ où n est l'entier déterminé par $2^{n-1} \leq N \leq 2^n - 1$". Saurez-vous rédiger proprement la récurrence en utilisant les idées données précédemment ? Attention, il faut effectuer une récurrence forte, car on va appliquer l'hypothèse de récurrence à $N_1 = (N - d_0)/2$, qui en général n'est pas égal à $N - 1$.

V.1. D'abord, pour conjecturer la formule, il faut faire un essai avec un petit nombre. Par exemple, $N = 11$. Alors $d_0 = 1$ et $y_1 = 5$, et donc $N = d_0 + 2y_1$. Ensuite, $d_1 = 1$ et $y_2 = 2$, et on a

$$11 = d_0 + 2y_1 = d_0 + 2(d_1 + 2y_2) = d_0 + 2d_1 + 4y_2.$$

Je crois que l'on peut conjecturer la formule ! L'entier naturel N est fixé. Démontrons par récurrence sur $k \geq 1$ que $N = \sum_{l=0}^{k-1} d_l 2^l + 2^k y_k$. Cette propriété est vraie pour $k = 1$, par IV.2. Supposons la propriété démontrée pour un certain $k \geq 1$ et prouvons la pour $k + 1$. Alors on sait que

$$N = \sum_{l=0}^{k-1} d_l 2^l + 2^k y_k$$

et que

$$y_k = d_k + 2y_{k+1}.$$

On en déduit que

$$N = \sum_{l=0}^{k-1} d_l 2^l + 2^k d_k + 2^{k+1} y_{k+1},$$

et donc la propriété est vraie au rang $k + 1$. Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

V.2. Remarquons que si $y_k > 0$, alors $y_{k+1} < y_k$ comme quotient de y_k dans une division par un entier strictement positif. De plus, il est clair que $y_k \geq 0$ (on ne fait que des divisions euclidiennes dans $\mathbb{N}$). Si la suite (y_k) ne s'annule pas, alors la suite (y_k) est une suite d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible (on aurait $y_k \leq y_0 - k$, et ceci devient strictement négatif à partir d'un certain rang). Il existe donc un plus petit entier n tel que $y_n = 0$. Puisque $y_{n-1} \neq 0$, on a $y_{n-1} = d_{n-1} = 1$. Le résultat de la question précédente, appliqué avec $k = n$, nous dit alors que $(d_0, \dots, d_{n-1})$ est la suite des chiffres de N dans son écriture en base 2.

V.3. Voici un programme sous Python qui fonctionne :

```python
def dyadique(N):
    L=[]
    y=N
    while (y>0):
        d=y%2
        L.append(d)
        y=y//2
    return L
```

V.4. En utilisant l'algorithme précédent, $391 = \overline{110000111}$.

VI.1. Pour calculer $d_k 2^k$ pour $k \geq 1$, il faut k multiplications. Donc il faut $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ multiplications. Il faut aussi $n - 1$ additions.

VI.2. Il ne faut plus effectuer que $n - 1$ multiplications, et toujours $n - 1$ additions.

VI.3. Toujours sous Python ! (ici, le programme n'est pas optimisé, il fait n multiplications et n additions...).

```python
def horner(L):
    n=len(L)
    N=0
    for i in range(n):
        N=2*N+L[n-i-1]
    return N
```

VI.4. En faisant tourner l'algorithme précédent, si je n'ai pas oublié un 0 en cours de route... on trouve 21025.

Partie C

VII. Tout élément a de $\mathbb{Z}$ s'écrit $a/2^0$ et est donc élément de D_2. L'inclusion est stricte car $1/2 \in D_2$ n'est pas élément de $\mathbb{Z}$. Si $x = a/2^p \in D_2$, alors $x = a/b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b = 2^p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ est un élément de $\mathbb{Q}$. L'inclusion est stricte car $1/3 \notin D_2$. En effet, si c'était le cas, il existerait deux entiers naturels a et p tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{2^p}$. On en déduirait que $3a = 2^p$, et donc que 3 divise 2^p, ce qui est faux.

VIII.1. Relisant bien la définition de la partie entière donnée au début de l'énoncé, il suffit de prouver que $a_0 \leq x < a_0 + 1$. La première inégalité est triviale. Pour la seconde, on remarque que

$$x \leq a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k} \leq a_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = a_0 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = a_0 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} < a_0 + 1.$$

Pour démontrer que la suite $(a_0, \dots, a_n)$ est déterminée de manière unique, on procède comme à la partie B et donc je vais aller très vite. Si deux suites $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_m)$ conviennent, avec donc

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^{-k} = \sum_{k=0}^{m} b_k 2^{-k}$$

alors on a prouvé que $a_0 = b_0 = E(x)$. On pose ensuite $y = 2(x - a_0)$ qui vérifie

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} b_{k+1} 2^{-k}.$$

On a alors $a_1 = b_1 = E(y)$. De proche en proche ou mieux, en effectuant une récurrence forte, on prouve que $a_k = b_k$ (on peut supposer que $n = m$ quitte à compléter l'une des deux suites par des zéros).

VIII.2. Écrivons $x = a/2^p$, avec $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$. Si $a = 1$, alors le résultat est démontré, avec $a_0 = 0$, $d_0 = 1$ et $d_1 = \dots = d_{p-1} = 0$. Sinon, $a \geq 2$ et donc il existe $n \geq 2$ et des entiers $d_0, \dots, d_{n-1}$ de $\{0, 1\}$, avec $d_{n-1} = 1$, tels que

$$a = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k.$$

On en déduit que

$$x = \frac{a}{2^p} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^{k-p} = \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p} + \sum_{k=p}^{n-1} d_k 2^{k-p}.$$

On obtient le résultat voulu avec $a_0 = \sum_{k=p}^{n-1} d_k 2^{k-p}$ qui est bien un entier (avec bien sûr $a_0 = 0$ si $p > n - 1$). Remarquons que les $d_0, \dots, d_{p-1}$ ne peuvent pas tous être égaux à 0 sinon on aurait $x \in \mathbb{N}$.

VIII.3. En faisant le changement d'indices $l = k - p$ dans la somme précédente, on trouve

$$x = a_0 + \sum_{l=1}^{p} d_{p-l} 2^l = \sum_{l=0}^{p} a_l 2^l$$

si on pose $a_l = d_{p-l}$. Comme tous les a_l ne sont pas nuls, on définit n comme le plus grand des entiers l tels que $a_l \neq 0$. La suite $(a_0, \ldots, a_n)$ est bien un développement dyadique de x.

IX. On trouve $a_0 = E(35/4) = 8$. Ensuite, on a

$$\frac{3}{4} = 2^{-1} + 2^{-2}.$$

Le développement dyadique de 35/4 est donc

$$\frac{35}{4} = 8 + 2^{-1} + 2^{-2}.$$

Partie D

X.1. Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$0 \leq a_k 2^{-k} \leq 2^{-k}.$$

Or, la série de terme général 2^{-k} est une série convergente puisque $|1/2| < 1$. Par majoration, on en déduit que la série de terme général $a_k 2^{-k}$ est convergente (il ne faut pas oublier d'écrire $a_k 2^{-k} \geq 0$ car le théorème de convergence par majoration ne fonctionne que pour les séries à termes positifs).

X.2. Si $M \geq N$, on a

$$\sum_{k=N}^{M} 2^{-k} = \frac{2^{-N} - 2^{-(M+1)}}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{-N+1} - 2^{-M}.$$

Faisant tendre M vers $+\infty$, on trouve

$$\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-N+1}.$$

X.3. Puisque $0 \leq a_k 2^{-k} \leq 2^{-k}$ et que les séries convergent, on a

$$0 \leq s(a) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1.$$

X.4. Si a est une suite dyadique propre, alors il existe $n \geq 1$ tel que $a_n = 0$. Mais alors :

$$s(a) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{-k} + 0 \cdot 2^{-n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k 2^{-k} < \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} + 2^{-n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1.$$

X.5. Soit m le plus des entiers naturels tels que $a_k = 1$ pour tout $k \geq m$ (question subsidiaire : pourquoi m existe-t-il ?). En particulier, $a_{m-1} = 0$. Alors

$$s(a) = \sum_{k=1}^{m-2} a_k 2^{-k} + \sum_{k=m}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{m-2} a_k 2^{-k} + 2^{-m+1}$$
$$= \frac{1 + \sum_{k=1}^{m-2} a_k 2^{m-1-k}}{2^{m-1}}.$$

Puisque pour $k \leq m-2$, $a_k 2^{m-1-k} \in \mathbb{N}$, $s(a)$ est un nombre dyadique.

X.6. On écrit que

$$s(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k} = \frac{1}{3}.$$

XI.1. Supposons $x \neq 0$ et considérons $(a_0, \dots, a_n)$ le développement dyadique de x. On sait aussi que $a_0 = E(x) = 0$. Posons, pour $k > n$, $a_k = 0$. Alors a est une suite dyadique propre et puisqu'on n'a ajouté que des zéros, on a aussi $x = s(a)$. Si x est nul, la suite a identiquement nulle est telle que $x = s(a)$.

XI.2. Si x est non nul, alors en gardant les notations précédentes, on sait que $a_n = 1$. Considérons alors la suite $b = (b_k)$ définie par $b_k = a_k$ si $1 \leq k < n$, $b_n = 0$ et $b_k = 1$ si $k \geq n+1$. Alors b est une suite dyadique impropre. De plus, d'après X.2., on a aussi que $x = s(b)$.

XII.1. Il s'agit de démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k(x) \in \{0, 1\}$. Bien sûr, $\alpha_k(x)$ est un entier, et donc il suffit de démontrer que $-1 < \alpha_k(x) < 2$. Mais, on sait que

$$E(2^k x) \leq 2^k x < E(2^k x) + 1 \text{ et } E(2^{k-1}x) \leq 2^{k-1}x < E(2^{k-1}x) + 1.$$

On réécrit la première inégalité en

$$2^k x - 1 < E(2^k x) \leq 2^k x$$

et la seconde en

$$-2^{k-1}x \leq -E(2^{k-1}x) < -2^{k-1}x + 1.$$

Multipliant par deux cette dernière double inégalité, et ajoutant la double inégalité précédente, on trouve que

$$2^k x - 1 - 2 \times 2^{k-1}x < \alpha_k(x) < 2^k x - 2 \times 2^{k-1}x + 2$$

soit

$$-1 < \alpha_k(x) < 2.$$

Comme justifié précédemment, ceci entraine que $\alpha_k(x) \in \{0, 1\}$, et donc que la suite $(\alpha_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

XII.2. $(u_n(x))$ est clairement une suite croissante et $(v_n(x) - u_n(x))$ tend clairement vers 0. Il reste à démontrer que $(v_n(x))$ est décroissante :

$$v_{n+1}(x) - v_n(x) = \alpha_{n+1}(x)2^{-n-1} + 2^{-n-1} - 2^{-n} = \alpha_{n+1}(x)2^{-n-1} - 2^{-n-1} \leq 0$$

puisque $\alpha_{n+1}(x) \in \{0, 1\}$. Les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont donc adjacentes. Elles sont clairement à valeurs dans D_2, et aussi à valeurs dans $[0, 1]$ par exemple en raisonnant comme à la question X.3.

XII.3. C'est une suite télescopique : on a en effet

$$\begin{aligned}
2^n u_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}E(2^k x) - 2^{n+1-k}E(2^{k-1}x)\\
&= \Big(2^{n-1}E(2x) - 2^n E(x)\Big) + \Big(2^{n-2}E(2^2x) - 2^{n-1}E(2x)\Big)\\
&\quad + \Big(2^{n-3}E(2^3x) - 2^{n-2}E(2^2x)\Big) + \cdots + \Big(E(2^n x) - 2E(2^{n-1}x)\Big)\\
&= E(2^n x) - 2^n E(x) = E(2^n x)
\end{aligned}$$

puisque $E(x) = 0$ sachant que $x \in [0,1[$. On peut enlever les pointillés dans le raisonnement précédent en coupant la somme en deux et en effectuant un changement d'indices dans une des deux sommes.
Puisque $E(2^n x) \leq 2^n x$, on obtient immédiatement que $u_n(x) \leq x$. D'autre part, on a $E(2^n x) + 1 > 2^n x$. Divisant par 2^n, ceci donne l'inégalité $x < v_n(x)$.

XII.4. Le même raisonnement qu'à la question III.5. dit que $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ convergent vers x.

XII.5. L'égalité $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x)2^{-k}$ n'est rien d'autre qu'une réécriture du fait que $(u_n(x))$ tend vers x. Il reste à démontrer que la suite $(\alpha_k(x))$ est propre. Si elle était impropre, il existerait $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_k(x) = 1$ pour tout $k \geq m$. Mais alors, en utilisant toujours le résultat de la question X.2. on aurait $u_{m+1}(x) = u_m(x) + 2^{-m} = v_m(x)$. On obtiendrait alors une contradiction entre $u_{m+1}(x) \leq x$ et $v_m(x) > x$. Donc la suite $(\alpha_k(x))$ est propre.

XII.6. La question précédente montre l'existence d'une suite dyadique propre, reste à prouver l'unicité. Considérons a et b deux suites dyadiques propres telles que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k} \text{ et } x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 2^{-k}$$

et supposons que $a \neq b$. Soit $m \geq 1$ le plus petit des entiers k tels que $a_k \neq b_k$. On peut supposer, quitte à échanger a et b, que $a_m = 1$ et $b_m = 0$. On a alors

$$2^{-m} = \sum_{k=m+1}^{+\infty} (b_k - a_k)2^{-k}.$$

Mais $-1 \leq b_k - a_k \leq 1$ et il existe un entier $p > m$ tel que $b_p - a_p \leq b_p < 1$ (puisque la suite b est propre). Reprenant un raisonnement désormais classique, on obtient que

$$2^{-m} < \sum_{k=m+1}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-m}$$

une contradiction. Tout réel de $[0,1[$ admet donc un unique développement dyadique propre.

XII.7. On a $d_1 = \alpha_1(x) = E(2x) - 2E(x) = E(2x)$. De plus,

$$s(d') = \sum_{k=1}^{+\infty} d_{k+1}2^{-k} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} d_{k+1}2^{-(k+1)} = 2\sum_{j=2}^{+\infty} d_j 2^{-j} = 2(x - d_1/2) = 2x - d_1.$$

On en déduit l'algorithme suivant : d_1 vaut $E(2x)$, puis $d_2 = d'_1$ est la partie entière de $y = 2x - d_1$, puis d_3 est la partie entière de $z = 2y - d_2$.

```
from math import *
def dvpdyadique(x,n):
    L=[]
    for i in range(n):
        d=floor(2*x)
        L.append(d)
        x=2*x-d
    return L
```

XIII. On remarque que $1\in D_2$ et que si $x\in[0,1[$, la suite $(u_n(x))$ est une suite de D_2 qui converge vers x. Ainsi, $D_2\cap[0,1]$ est dense dans $[0,1]$. Si maintenant $x\in\mathbb{R}$, posons $y=x-E(x)$ qui est dans $[0,1[$. Alors il existe une suite (u_n) de D_2 qui converge vers y. Mais la suite (v_n) définie par $v_n=E(x)+u_n$ est aussi une suite de D_2, et elle converge vers x.

XIV. Je vois au moins deux rédactions possibles... Ou bien on utilise que $D_2\subset\mathbb{Q}$ et donc que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\backslash D_2$, et le fait que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ou bien on remarque que si $x\in D_2$, alors $x+\frac{1}{3}\notin D_2$. Considérons alors $y\in\mathbb{R}$. Il existe une suite (u_n) de D_2 qui converge vers $y-\frac{1}{3}$. Mais la suite (v_n) définie par $v_n=u_n+\frac{1}{3}$ converge vers y et est une suite de $\mathbb{R}\backslash D_2$.

XV.1. Posons pour tout $k\geq 1$, $b_k=1-a_k$. Alors

$$1-x=\sum_{k\geq 1}2^{-k}+\sum_{k\geq 1}a_k2^{-k}=\sum_{k\geq 1}(1-a_k)2^{-k}=\sum_{k\geq 1}b_k2^{-k}.$$

Ainsi, on a obtenu un développement dyadique (propre ou impropre) de $1-x$. Je suis un peu embarassé par la formulation de l'énoncé qui nous demande **le** développement dyadique de $1-x$. Si le développement obtenu est impropre, il faut alors discuter en regardant le plus petit entier m tel que $b_k=1$ pour tout $k\geq m$. Le développement dyadique propre de $1-x$ est alors $(b_0,b_1,\dots,b_{m-2},1)$. - A mon avis, l'énoncé aurait du partir d'un réel qui n'est pas un dyadique pour éviter tout problème...

XV.2. Si $2x\in[0,1[$, c'est que $E(2x)=a_1=0$. On a alors

$$2x=\sum_{k\geq 2}a_k2^{-k+1}=\sum_{k\geq 1}a_{k+1}2^{-k}.$$

De même, si $2^lx\in[0,1[$, alors on a $a_1=\dots=a_l=0$ (souvenez-vous de la définition de $\alpha_k(x)$), et donc

$$2^lx=\sum_{k\geq 1}a_{k+l}2^{-k}.$$

XV.3. Notons $(a_k)_{k\geq 1}$ le développement dyadique propre de $2/3$. Alors le développement dyadique propre de $1/3=1-2/3$ est $(1-a_k)_{k\geq 1}$ (la suite (a_k) ne peut pas se terminer par des zéros, car $2/3$ n'est pas un dyadique). Mais le développement dyadique de $2/3=2\times 1/3$ est $(1-a_{k+1})_{k\geq 1}$. Par unicité du développement dyadique propre, on a alors $1-a_{k+1}=a_k$ pour tout $k\geq 1$. Sachant que $a_1=E(4/3)=1$, on en déduit que $a_k=1$ si k est impair, et $a_k=0$ si k est pair.

Partie E

Je vais aller très vite dans la rédaction de cette partie, qui n'a presque jamais été abordée...

XVI.1. Ce sont juste des formules de trigonométrie usuelles.

XVI.2. On distingue alors trois cas :
- ou bien θ est un entier pair ; dans ce cas, la suite (c_n) est la suite constante égale à 1 : elle est convergente.
- ou bien θ est un entier impair. Aalors $\cos(\pi\theta) = -1$ et plus généralement $c_n = (-1)^n$: la suite ne converge pas.
- ou bien θ n'est pas un entier. Alors $\sin(\pi\theta) \neq 0$ et $|\cos(\pi\theta)| < 1$. Supposons que la suite (c_n) converge vers ℓ. Passant à la limite dans la première relation, on trouve $2\ell = 2\ell\cos(\pi\theta)$. Comme $\cos(\pi\theta) \neq 1$, on a $\ell = 0$. Étudions maintenant la deuxième relation. Écrivant $s_n = \frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{-2\sin(\pi\theta)}$, on trouve que (s_n) converge vers 0. Tout cela contredit la troisième relation, car en passant à la limite, on trouverait $0 = 1$. Donc dans ce cas, la suite ne peut pas non plus converger.

XVII.1. On écrit $\theta = a/2^p$, et on remarque que $2^n\theta = 2^{n-p}a$ est un entier pair pour n assez grand. La suite (u_n) est stationnaire égale à 1.

XVII.2. Cette fois, $2^n\theta = 2^{n-p}a + 2^n/3$. Donc $u_n = \cos(2^n\pi/3)$. Mais on montre facilement (par exemple par récurrence en anticipant sur la question XVII.4., ou alors par congruence...) que $\cos(2^n\pi/3) = -1/2$. La suite est donc stationnaire à $-1/2$.

XVII.3. Même raisonnement, même résultat !

XVII.4. C'est la formule de trigonométrie $\cos(2x) = ...$

XVII.5. Passons à la limite dans l'équation précédente. On doit avoir $\ell = 2\ell^2 - 1$ dont les solutions sont $\ell = 1$ et $\ell = -1/2$.

XVII.6. On écrit

$$\theta - E(\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{-k} + a_n 2^{-n} + a_{n+1}2^{-(n+1)} + \sum_{k\geq n+2} a_k 2^{-k}.$$

On multiplie tout par 2^n et on trouve

$$2^n\theta = 2^nE(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-k} + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{k\geq n+1} a_k 2^{n-k}.$$

En posant $k_n = \frac{2^nE(\theta) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-k}}{2}$ et $\varepsilon_n = \sum_{k\geq n+1} a_k 2^{n-k}$, je vous laisse le soin de vérifier que les conditions demandées par l'énoncé sont remplies (il faut tout de même supposer $n \geq 1$...).

XVII.7. On remarque que

$$u_n = \cos\left(a_n\pi + \frac{a_{n+1}}{2}\pi + \varepsilon_n\pi\right).$$

Si $a_n = a_{n+1} = 0$, alors $u_n = \cos(\varepsilon_n\pi)$ avec $\varepsilon_n \in [0, 1/2]$, et donc $u_n \geq 0$. Si $a_n = a_{n+1} = 1$, on a $u_n = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n\pi\right)$. Comme $\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n\pi \in [3\pi/2, 2\pi]$, le cosinus de cet angle est bien dans $[0, 1]$. Si $a_n \neq a_{n+1}$, on fait un raisonnement tout à fait similaire en distinguant le cas $a_n = 0$ et $a_{n+1} = 1$ du cas $a_n = 1$ et $a_{n+1} = 0$.
Pour la deuxième partie de la question il n'y a rien à faire : les assertions sont simplement les contraposées des assertions précédentes !

XVII.8. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ (ici, ça ne peut être que vers 1), alors à partir d'un certain rang n_0, $u_n > 0$ (sauriez-vous le démontrer ?) et donc $a_n = a_{n+1}$ et donc il existe $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n = \varepsilon$. Mais $\varepsilon = 1$ ne convient pas, car le développement dyadique considéré de θ est le développement dyadique propre. Donc $a_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Autrement dit, θ est un nombre dyadique.

XVII.9. Si (u_n) converge vers $\ell < 0$ (ici, ça ne peut être que vers $-1/2$), alors à partir d'un certain rang n_0, $u_n < 0$ et donc $a_n \neq a_{n+1}$. Quitte à changer n_0 en $n_0 + 1$, on peut supposer que $a_{n_0} = 0$. Supposons que n_0 est pair. On a alors

$$\theta = E(\theta) + \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k 2^{-k} + \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k 2^{-k}$$

avec, pour $k \geq n_0$, $a_k = 0$ si k est pair et $a_k = 1$ si k est impair. Utilisant le résultat de la question XV.3., on a

$$\theta - \frac{2}{3} = E(\theta) + \sum_{k=1}^{n_0-1} b_k 2^{-k}$$

avec $b_k \in \{-1, 0, 1\}$. Ce dernier nombre, $\sum_{k=1}^{n_0-1} b_k 2^{-k}$, est un nombre dyadique. Si n_0 est impair, cette fois on trouve que c'est $\theta - \frac{1}{3}$ qui est un nombre dyadique.

XVIII. La suite (u_n) converge si et seulement θ est dyadique, ou $\theta - \frac{1}{3}$ est dyadique, ou $\theta - \frac{2}{3}$ est dyadique. Dans le premier cas, la suite (u_n) converge vers 1, dans les deux autres, elle converge vers $-1/2$.