Avertissement : Ceci n'est pas une correction *in extenso* du problème de capes. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Le premier problème est un problème autour de méthodes de calcul approché d'intégrales : méthode des rectangles, méthode des trapèzes, méthode de Monte-Carlo. Il utilise bien sûr des arguments classiques d'analyse, mais aussi des propriétés de statistiques, comme celles liées à l'estimation, et demande d'écrire deux algorithmes. Le second problème nous emmène au pays des marches aléatoires et de l'algorithme PageRank de Google. Matrices et probabilités sont à l'honneur !

Premier problème

I. !!!

II. L'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ vaut (en unités d'aires...) l'aire du domaine situé entre la courbe d'équation $y=\sqrt{1-x^2}$, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$. Notons $\mathcal{S}$ ce domaine. Alors on a

$$(x,y)\in\mathcal{S} \iff 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2} \iff 0\leq x\leq 1,\ y\geq 0,\ y^2\leq 1-x^2.$$

Ce domaine est donc exactement le quart de disque $\mathcal{D}$. Bien sûr, on peut aussi calculer cette intégrale (par exemple, en effectuant le changement de variables $x=\sin t$), mais ce n'est pas du tout l'esprit de la question !

III.1. “Ce que vous faites est une conjecture. Il faut désormais la démontrer.”

III.2. C'est très classique ! Le point clé est que la fonction ϕ est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $i\in\{0,\dots,n-1\}$. Alors, pour tout $t\in[i/n,(i+1)/n]$, on a

$$\phi(x_{i+1})\leq\phi(t)\leq\phi(x_i).$$

Intégrons cette inégalité sur l'intervalle $[i/n,(i+1)/n]=[x_i,x_{i+1}]$. Alors on a

$$(x_{i+1}-x_i)\phi(x_{i+1})=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi(x_{i+1})dt\leq\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi(t)dt\leq\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi(x_i)dt=(x_{i+1}-x_i)\phi(x_i)$$

soit encore

$$\frac{1}{n}\phi(x_{i+1})\leq\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi(t)dt\leq\frac{1}{n}\phi(x_i).$$

On somme cette inégalité pour i allant de 0 à $n-1$. Utilisant l'inégalité de Chasles, on trouve

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi(x_{i+1})\leq\int_0^1\phi(t)dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi(t)dt\leq\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi(x_i).$$

C'est le résultat demandé, à condition de faire un changement d'indices dans la somme apparaissant à gauche.

III.3 L'aire de chaque rectangle grisé vaut la différence entre l'aire du rectangle au-dessus et l'aire du rectangle au-dessous, soit $\frac{1}{n}\big(\phi(x_i)-\phi(x_{i+1})\big)$. La somme des aires des rectangles grisés est donc bien égal à $\hat{s}(n)-\check{s}(n)$. Mais cette somme est télescopique : on a

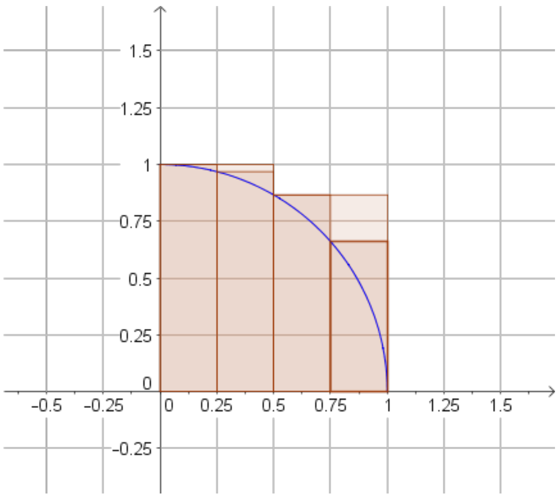
$$\hat{s}(n)-\check{s}(n)=\frac{1}{n}\big(\phi(0)-\phi(1)\big)=\frac{1}{n}.$$

III.4. D'après les inégalités de la question 2., on a

$$|\mathcal{A}-\hat{s}(n)|=\hat{s}(n)-\mathcal{A}\leq\hat{s}(n)-\check{s}(n)=\frac{1}{n}.$$

Il suffit donc que $\frac{1}{n}\leq 10^{-3}$, soit $n\geq 10^3$. L'entier $N=10^3$ convient.

III.5. Comme je trouvais qu'on n'y voyait rien en représentant les quatre méthodes des rectangles sur le même dessin, je n'ai représenté que les rectangles au-dessus sur le dessin suivant :



Sur cette figure, on voit clairement que $\hat{s}(4)\leq\hat{s}(2)$. L'explication est à la question suivante.

III.6. Nous allons commencer par prouver que la suite $(\hat{s}(2^n))$ est décroissante. Pour cela, notons x_i le point de coordonnées $i/2^n$, pour i allant de 0 à 2^n-1, et y_i le point de coordonnées $i/2^{n+1}$, pour i allant de 0 à $2^{n+1}-1$. Il est important de remarquer que $y_{2i}=x_i$. On a alors

$$\hat{s}(2^{n+1}) \quad = \quad \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1}\phi(y_i).$$

L'idée est alors de regrouper les petits rectangles deux par deux, et de comparer leur aire à celle d'un grand rectangle.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=0}^{2^n-1}\big(\phi(y_{2i})+\phi(y_{2i+1})\big)\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1}\frac{\phi(y_{2i})+\phi(y_{2i+1})}{2}.
\end{aligned}$$

Mais $y_{2i} = x_i$ et $y_{2i+1} \geq x_i$. Puisque ϕ est décroissante, on a donc $\phi(y_{2i}) \leq \phi(x_i)$ et $\phi(y_{2i+1}) \leq \phi(x_i)$. Ainsi, on a donc

$$\begin{aligned} \hat{s}(2^{n+1}) &\leq \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1}\frac{\phi(x_i)+\phi(x_i)}{2} \\ &\leq \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1}\phi(x_i) \\ &\leq \hat{s}(2^n). \end{aligned}$$

On démontre de la même façon que la suite $(\check{s}(2^n))$ est croissante. Puisque la différence $\hat{s}(2^n) - \check{s}(2^n)$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes.

III.7. Puisque les deux suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite qui ne peut être que $\mathcal{A}$ d'après la question 2. On a ainsi démontré la conjecture de l'élève, et le fait de considérer des subdivisions de taille 2^n fait que les rectangles sont vraiment "inclus" les uns dans les autres d'une étape à l'autre. Cela dit, je m'interroge sur la place de cette question ici. On prouve dès les question 2 et 3 la convergence des suites $\hat{s}(n)$ et $\check{s}(n)$.

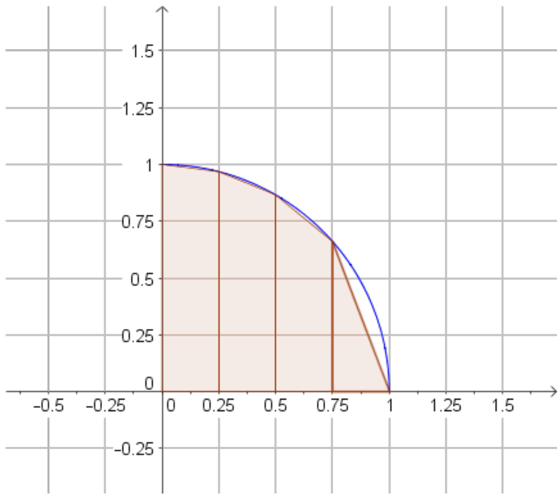
III.8. Voici un algorithme de calcul :

```
Variables :
  s,x réels
  n,i entiers
Traitement :
  Lire n
  s=0
  Pour i allant de 0 à n-1 faire
    x=i/n
    s=sqrt(1-x*x)+s
  Fin Pour
  Afficher s/n
```

La variable `x` pourrait être omise. Elle est ici pour une question de lisibilité de l'algorithme.

IV.1. Cette méthode porte le nom de méthode des trapèzes car $s(n)$ est la somme des aires des trapèzes de sommets

$$(x_i, 0),\ (x_{i+1}, 0),\ (x_{i+1}, \phi(x_{i+1})),\ (x_i, \phi(x_i)).$$



IV.2. C'est trivial, ou bien géométriquement, ou bien en utilisant que $\hat{s}(n) \geq \check{s}(n)$.

IV.3. Voici une question à laquelle je ne sais pas répondre autrement que de la même façon que l'élève de terminale scientifique plus haut dans le sujet ! Géométriquement, on peut conjecturer que $s(n)$ propose une meilleure approximation de $\mathcal{A}$ que les deux autres, mais de là à le prouver ! Tout juste peut-on ici exploiter la concavité de la courbe pour remarquer que

$$\check{s}(n) \leq s(n) \leq \mathcal{A}$$

ce qui entraîne que $s(n)$ est une meilleure approximation de $\mathcal{A}$ que $\check{s}(n)$. En revanche, je ne sais pas comparer directement l'approximation donnée par $s(n)$ et celle donnée par $\hat{s}(n)$.

V.1. ? ? ? ?

V.2.
```
Variables :
  f,x,y réels
  N,i entier
Traitement :
  Lire N
  f=0
  Pour i allant de 1 à N faire
    x=alea()
    y=alea()
    si (x*x+y*y<=1) alors f=f+1
  Fin Pour
  Afficher f/N
```

V.3. On réalise N tirages aléatoires indépendants avec probabilité $\mathcal{A}$ de succès à chaque tirage. Si les conditions usuelles sont réalisées (ie $N \geq 30$, $N\mathcal{A} \geq 5$, $N(1-\mathcal{A}) \geq 5$), un intervalle de confiance au seuil de 95% de $\mathcal{A}$ est donné par

$$\left[f - 1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{N}}, f + 1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{N}} \right].$$

Puisque la fonction $x \mapsto x(1-x)$ a pour maximum $1/4$ sur l'intervalle $[0,1]$ (atteint en

1/2), cet intervalle est alors inclus dans

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{N}}, f + \frac{1}{\sqrt{N}}\right].$$

V.4. Pour avoir une estimation de $\mathcal{A}$ avec une précision de 10^{-3} et niveau de confiance de 95%, il suffit que l'intervalle précédent ait une largeur inférieur à 10^{-3}, c'est à dire que

$$\frac{2}{\sqrt{N}} \leq 10^{-3} \iff N \geq 4 \cdot 10^6.$$

V.5. C'est beaucoup moins bien ! (mais c'est normal, l'approximation est en $1/\sqrt{N}$ alors qu'auparavant, elle était en $1/N$ - avec la méthode des trapèzes, on pourrait même montrer qu'on a une approximation en $1/N^2$).

Deuxième problème

Partie A Les résultats généraux du début de cette partie constituent des éléments essentiels de la théorie des graphes probabilistes. Ils doivent absolument être maîtrisés !

I. Notons, pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq n$, $E_i^{(k)}$ l'événement "Après la k-ième étape, le point est sur le sommet i". Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les événements $E_1^{(k)}, \dots, E_n^{(k)}$ forment un système complet d'événements. La somme de leurs probabilités fait donc 1, et $p_i^{(k)}$ est justement la probabilité de $E_i^{(k)}$.

I.2. La formule des probabilités totales nous dit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $1 \leq j \leq n$, on a

$$P(E_j^{(k+1)}) = \sum_{i=1}^{n} P(E_j^{(k+1)} | E_i^{(k)}) P(E_i^{(k)})$$

soit

$$p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} p_i^{(k)}.$$

Ce coefficient est exactement celui qui apparait à la j-ième colonne du produit de la matrice-ligne $P^{(k)}$ par la matrice A. D'où la relation demandée.

I.3. Récurrence.

I.4. Dire que $(P^{(k)})$ converge vers P signifie que, pour tout $i = 1, \dots, n$, la suite de réels $(p_i^{(k)})$ converge vers p_i. Si on passe à la limite dans les deux relations (valables pour tout $1 \leq j \leq k$)

$$p_1^{(k)} + \cdots + p_n^{(k)} = 1 \text{ et } p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} p_i^{(k)},$$

alors on trouve respectivement

$$p_1 + \cdots + p_n = 1 \text{ et } p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} p_i.$$

Elles expriment exactement le résultat voulu.

II.1. $A = \frac{1}{3}U$.

II.2.

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ U^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

(bien sûr, vous savez calculer un produit de matrices avec un logiciel de calcul formel ou avec un tableur !).

II.3. Voici une question assez difficile (ce qui est en partie due à la mauvaise rédaction -à mon avis - de la question). Bien sûr, on est incité à faire une récurrence. Mais ce n'est pas si facile de poser l'hypothèse de récurrence, notamment la place des suites (α_k) et (β_k) vis à vis de cette récurrence ainsi que les relations demandées. Je propose trois solutions. Elles ont en commun que l'on définit d'abord les suites avant l'hypothèse de récurrence (et donc le "Montrer de plus" de l'énoncé est directement incorporé dans la récurrence, au moins pour les deux premières rédactions).

— Soit (α_k) et (β_k) les suites définies par $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_{k+1} = 3\beta_k$, $\beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k$. Pour $k \geq 0$, notons

$$\mathcal{P}(k) ='' U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.''$$

Prouvons par récurrence sur k que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geq 0$. Je ne vais pas aller plus loin dans la rédaction de cette solution ; il y a une petite difficulté lors de la phase d'hérédité car comment expliquer proprement que le produit matriciel va donner la bonne forme pour U^{k+1} ?

— Cette méthode est une variante de la précédente. Elle est basée sur les observations suivantes : on nous demande en réalité de prouver que $U^k = \alpha_k I + \beta_k U$, et on sait déjà que $U^2 = 3I + 2U$. Ceci nous incite à écrire la récurrence sous la forme suivante : Soit (α_k) et (β_k) les suites définies par $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_{k+1} = 3\beta_k$, $\beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k$. Pour $k \geq 0$, notons

$$\mathcal{P}(k) ='' U^k = \alpha_k I + \beta_k U''.$$

Alors $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée pour tout $k \geq 0$. En effet, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont clairement vérifiées, sachant que $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$. Soit $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée et prouvons $\mathcal{P}(k+1)$. On a

$$U^{k+1} = U^k \times U = (\alpha_k I + \beta_k U) \times U = \alpha_k U + \beta_k U^2.$$

Utilisant la reation $U^2 = 3I + 2U$, on en déduit que

$$U^{k+1} = 3\beta_k I + (\alpha_k + 2\beta_k)U = \alpha_{k+1} I + \beta_{k+1} U.$$

La propriété est bien démontrée au rang $k+1$. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier k.

— On peut aussi tricher un peu si on a lu la suite du sujet (notamment la question A.II.5.) où on donne les valeurs de α_k et β_k, et formuler l'hypothèse de récurrence sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}(k) ='' U^k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4} I + \frac{3^k - (-1)^k}{4} U.''$$

Elle se démontre exactement de la même façon que précédemment, et ensuite on peut montrer que les suites (α_k) et (β_k) vérifient la relation demandée.

Signalons enfin qu'on peut aussi répondre à cette question, et à la question III.5., sans utiliser de récurrence, mais à l'aide d'un raisonnement à base de division euclidienne. En effet, pour $k \geq 1$, effectuons la division euclidienne de X^k par le polynôme $X^2 - 2X - 3$ (qui est un polynôme annulateur de U). Alors il existe deux réels α_k et β_k et un polynôme Q_k tels que

$$X^k = (X^2 - 2X - 3)Q_k(X) + \beta_k X + \alpha_k.$$

On détermine α_k et β_k en évaluant cette égalité en les racines de $X^2 - 2X - 3$, c'est-à-dire en -1 et en 3. On trouve les deux relations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-1)^k & = & -\beta_k + \alpha_k \\ 3^k & = & 3\beta_k + \alpha_k \end{array}\right.$$

La résolution de ce système donne $\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}$. Maintenant, du fait que $U^2 - 2U - 3I = 0$, l'égalité $X^k = (X^2 - 2X - 3)Q_k(X) + \beta_k X + \alpha_k$ donne $U^k = \beta_k U + \alpha_k I$, exactement le résultat souhaité.

II.4.

II.5. Cette question incite à réviser, si ce n'est pas encore fait, comment étudier les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. L'idée est d'introduire l'équation caractéristique $r^2 = 2r + 3$, dont les racines sont -1 et 3 (tiens, tiens...). On sait alors qu'il existe deux constantes a et b telles que, pour tout $k \geq 0$, on a $\beta_k = a(-1)^k + b3^k$. On détermine a et b en sachant que $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 1$, ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & a + b \\ 1 & = & -a + 3b \end{array}\right.$$

La résolution de ce système donne le résultat souhaité, et on en déduit très aisément l'expression de α_k.

II.6. On a

$$P^{(k)} = P^{(0)} A^k = P^{(0)} \frac{1}{3^k} U^k.$$

On connait tout et après un petit calcul, on trouve

$$P^{(k)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^k, \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^k, \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^k, \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^k \right).$$

II.7. Il est facile de constater que chaque coordonnée de $P^{(k)}$ converge vers $\frac{1}{4}$, essentiellement parce que $\left|\frac{-1}{3}\right|^k < 1$. Ainsi, $(P^{(k)})$ converge vers $P = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

III.1. On a

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)A = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1).$$

III.2. Il n'y a aucune arête entre deux sommets de X ni aucune arête entre deux sommets de Y. Ainsi, si le point se trouve sur un sommet de la partie X à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de Y à l'étape suivante, et vice-versa.

III.3.a. On va démontrer le résultat par récurrence sur k, mais là encore il s'agit d'une récurrence un peu délicate. On peut la traiter par une récurrence double tenant compte en même temps du cas pair et du cas impair. Pour $n \geq 0$, notons $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse suivante : "Pour $k = 2n$, les coefficients de $P^{(k)}$ dont les indices sont des éléments de Y sont nuls, et pour $k = 2n+1$, les coefficients de $P^{(k)}$ dont les indices sont des éléments de X sont nuls". Ceci est exactement la même chose que l'hypothèse suivante : "Pour $k = 2n$, le point se trouve forcément sur un sommet de la partie X à l'étape k, et pour $k = 2n+1$, le point se trouve forcément sur un sommet de la partie Y à l'étape k."
Démontrons d'abord que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, à l'étape 0, le point est en 1 qui appartient à X, et d'après la question précédente, à l'étape 1, il est sur un sommet de Y.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, à l'étape $2n+1$, le point se trouve sur un sommet de Y, donc à l'étape $2n+2$, il se trouve sur un sommet de X. Et donc, à l'étape $2n+3 = 2(n+1)+1$, il se trouve à nouveau sur un sommet de Y. Nous avons donc prouvé que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.3.b. La somme des coefficients de $P^{(k)}$ valant 1, on a, en tenant compte du résultat de la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_1^{(2n)} + p_3^{(2n)} + p_6^{(2n)} + p_8^{(2n)} = 1$$

et

$$p_1^{(2n+1)} + p_3^{(2n+1)} + p_6^{(2n+1)} + p_8^{(2n+1)} = 1.$$

Si la suite $(P^{(k)})$ convergeait, il existerait p_1, p_3, p_6 et p_8 tels que $(p_1^{(k)})$ converge vers p_1, $(p_3^{(k)})$ converge vers p_3, $(p_6^{(k)})$ converge vers p_6, $(p_8^{(k)})$ converge vers p_8. Le passage à la limite dans les deux expressions précédentes donnerait respectivement :

$$p_1 + p_3 + p_6 + p_8 = 1 \text{ et } p_1 + p_3 + p_6 + p_8 = 0$$

ce qui est manifestement une contradiction ! Donc la suite $(P^{(k)})$ ne converge pas.

IV. Je trouve cette question très mal formulée car, comme nous allons le constater, il n'existe pas un seul lien logique (ce à quoi on s'attend par la formulation "celui qui"), mais deux liens logiques liant (i) et (ii). En réalité, on a prouvé que si (i) est vrai, alors (ii) est aussi vrai (c'est la question I.4.). En revanche, nous venons d'établir un contre-exemple au fait que si (ii) est vrai, alors (i) est vrai (ce sont les question III.1. et III.3.b.). Autrement dit, on a prouvé que $(i) \implies (ii)$ et que l'implication réciproque est fausse. En terme de condition nécessaire et de condition suffisante, cela signifie que
— (i) est une condition suffisante pour que (ii) ait lieu. Si (i) est vérifié, alors (ii) est vérifié.
— (ii) est une condition nécessaire pour que (i) ait lieu. Pour que (i) soit vérifié, il est nécessaire que (ii) soit vérifié.
Plus généralement, dans toute implication $(A) \implies (B)$, (A) est une condition suffisante pour que (B) soit vraie, et (B) une condition nécessaire pour que (A) soit vraie. Le lecteur non convaincu pourra considérer les propriétés (A) et (B) portant sur l'entier n et définies par (A) : $n \in \{2, 4\}$ et (B) : n est pair. Pour que n soit pair, il suffit que $n \in \{2, 4\}$. Pour que $n \in \{2, 4\}$, il est nécessaire que n soit pair.

Partie B Dans cette partie, même s'il est question de matrice stochastique et de densité de probabilité, on ne fait essentiellement que du calcul matriciel élémentaire (sauf à la question II.) !

I. Soit A une matrice dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Alors dire que A est une matrice stochastique revient à dire que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Autrement dit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Or, on reconnait ici le coefficient de la i-ème ligne du produit de A par le vecteur colonne $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc A est stochastique si et seulement si $AC = C$.

II. Pour le vecteur $P^{(k)}$, on l'a déjà fait : c'est la question A.I.1. Pour la matrice A, notons E_i l'événement "À l'étape 0, le point est au sommet i" et F_j l'événément "À l'étape 1, le point est au sommet j", de sorte que $a_{i,j}$ est exactement la probabilité conditionnelle $P_{E_i}(F_j)$. Puisque $F_1, \dots, F_n$ constitue un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(F_j) = 1.$$

Ceci exprime bien le fait que la matrice A est stochastique.

III. Remarquons d'abord que XA est un vecteur ligne dont tous les coefficients sont positifs ou nuls puisque tous les coefficients de X et tous les coefficients de A sont positifs ou nuls. De plus, notons $XA = (y_1, \dots, y_n)$. Alors on a, pour tout $j = 1, \dots, n$,

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} x_k a_{k,j}.$$

On en déduit que

$$\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_k a_{k,j},$$

soit, après permutation des deux sommes,

$$\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n a_{k,j}.$$

Or, la somme intérieure vaut 1 puisque la matrice A est stochastique, et donc

$$\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{k=1}^n x_k = 1$$

puisque X est une densité de probabilité. Donc XA aussi.

IV. On remarque d'abord que tous les coefficients de AB sont positifs ou nuls d'après la formule du produit matriciel. Ensuite, on a

$$AB \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question I., la matrice AB est stochastique. La preuve pour $\alpha A + (1-\alpha)B$ est exactement identique.

V. Se déduit aisément de la définition par passage à la limite.

V. Idem.

Partie C

I. Je ne sais pas trop comment répondre sans paraphraser la relation. Si i pointe vers j, on a $\mu_j = \frac{1}{\lambda_i}\mu_i$+quelque chose ne dépendant pas de μ_i. La pertinence μ_j dépend bien de façon affine de la pertinence μ_i de la page i qui pointe vers la page j. De plus, plus il y a de liens sur la page i, plus λ_i est grand, et donc plus sa contribution à la pertinence de μ_j diminue.

II. Ou bien on peut dire que A est la matrice de transition d'un graphe et utiliser B.II. ou bien on remarque que, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{i \to j} \frac{1}{\lambda_i} = \lambda_i \times \frac{1}{\lambda_i} = 1$$

et que les coefficients de A sont bien tous positifs ou nuls.

III. Que dire d'autre si ce n'est que cela suit immédiatement de la définition du produit matriciel et de la définition de la matrice A (autrement dit, c'est l'écriture matricielle d'un système).

IV.1. C'est la question A.I.2, non ?

IV.2. C'est A.I.4., C.III. et C.IV.1. non ?

Partie D

I. cf C.IV.2.

II. Même raisonnement qu'en C.I. sauf qu'on ajoute une constante dans le quelque chose et que le facteur multiplicatif devant ν_i est $\frac{1-\alpha}{\lambda_i}$.

III. Si $Q = (q_1, \dots, q_n)$, alors la i-ème colonne du produit QJ est $q_1 + \cdots + q_n = 1$, d'où le résultat.

IV. Même justification. La relation $AU = U$, puisque le vecteur U est **non-nul**, exprime que 1 est valeur propre de la matrice A, et que U est un vecteur propre associé.

V.1. Remarquons ici la ruse du sujet. Il y est introduit $|Z|$ sans qu'il en soit fait usage ultérieurement. Je pense que c'est simplement pour aider au choix de "la coordonnée bien choisie du vecteur AZ". Soit donc i la coordonnée de Z telle que $|Z| = |z_i|$. Autrement dit, $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. La i-ème coordonnée de AZ est $\sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j$ et ceci doit être égal à λz_i. Prenant les valeurs absolues et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$

où on a utilisé aussi que $a_{i,j} \geq 0$ et que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On a donc obtenu $|\lambda||z_i| \leq |z_i|$. Comme $|z_i| \neq 0$ (sinon Z serait le vecteur nul, ce qui est impossible puisque c'est un vecteur propre associé - il faut entendre non-nul dans l'énoncé !), ceci entraîne encore que $|\lambda| \leq 1$.

V.2. Si $\beta > 1$, alors β n'est pas valeur propre de A. Autrement dit, $A - \beta I_n$ a son noyau réduit à $\{0\}$. Puisqu'on travaille avec des matrices carrées de taille n (autrement dit, avec des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$), et qu'on sait que pour de telles matrices, être inversible équivaut à avoir son noyau réduit à $\{0\}$, on en déduit que $A - \beta I_n$ est inversible.

V.3. On ne change pas l'inversibilité d'une matrice en la multipliant par un scalaire non-nul. Autrement dit,

$$\begin{aligned} I_n - \gamma A \text{ inversible} \quad &\iff \quad -\gamma\left(A - \frac{1}{\gamma} I_n\right) \text{ inversible} \\ &\iff \quad A - \frac{1}{\gamma} I_n \text{ inversible.} \end{aligned}$$

Puisque la condition $0 < \gamma < 1$ entraîne $1/\gamma > 1$, le résultat est une conséquence de la question précédente.

VI.1. $0 < 1 - \alpha < 1$.

VI.2. Multipliant à droite par $(I_n - (1-\alpha)A)$, on a

$$H\left(I_n - (1-\alpha)A\right) = \frac{\alpha}{n} L \iff H - (1-\alpha)HA = \frac{\alpha}{n} L$$

ce qui est le résultat voulu.

VII.1. C'est du calcul !

$$\begin{aligned} Q^{(k+1)} - H &= Q^{(k)}B - (1-\alpha)HA - \frac{\alpha}{n}L \\ &= Q^{(k)}\left((1-\alpha)A + \frac{\alpha}{n}J\right) - (1-\alpha)HA - \frac{\alpha}{n}L \\ &= (1-\alpha)(Q^{(k)} - H)A + \frac{\alpha}{n}Q^{(k)}J - \frac{\alpha}{n}L. \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le résultat de la question III.

VII.2. Récurrence.

VIII. Puisque le produit de matrices stochastiques est stochastique, on obtient par récurrence sur k que A^k est une matrice stochastique pour tout entier k. Si $(\theta_j)_{1\leq j\leq n}$ sont les coefficients de la matrice $Q-H$ (ils ne dépendent pas de k) et $(a_{i,j}^{(k)})$ sont ceux de A^k, le j-ième coefficient de $(Q-H)A^k$ est donné par

$$\sum_{m=1}^{n}\theta_m a_{m,j}^{(k)}.$$

Or,

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\theta_m a_{m,j}^{(k)}\right|\leq \kappa\sum_{m=1}^{n}a_{m,j}^{(k)}\leq \kappa n$$

où $\kappa=\max_{1\leq j\leq n}|\theta_j|$. Ceci prouve bien que les coefficients de $(Q-H)A^k$ sont bornés. Puisqu'on les multiple par une suite tendant vers 0, les coefficients de $(1-\alpha)^k(Q-H)A^k$ tendent vers zéro. Autrement dit, la suite $Q^{(k)}$ converge vers H.

IX. H est une densité de probabilité.

X. On a toujours convergence de la suite de densités $(Q^{(k)})$, alors que ce n'était pas toujours le cas pour la suite $(P^{(k)})$ de la partie C.

XI. Je ne sais pas quoi répondre, si ce n'est la convergence de la suite $(Q^{(k)})$ vers H...