Exercices - Capes 2017 - première épreuve / option mathématiques : corrigé

Avertissement : Ceci n'est pas une correction *in extenso* du problème de capes. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Le premier problème aborde des considérations sur le réseau $\mathbb{Z}^2$ de $\mathbb{R}^2$ et sur les isométries laissant invariant ce réseau. Il se termine par deux parties portant sur les frises et les pavages. Les thèmes abordés sont l'algèbre linéaire, la géométrie affine et euclidienne, l'arithmétique (théorème de Bezout). Le deuxième problème vise à résoudre une équation fonctionnelle. Les seuls outils nécessaires sont des calculs algébriques et les notions de base sur les applications (injection, surjection,....).

Premier problème

Partie A

I. C'est assez difficile de répondre aux deux premières questions qui ne sont que des banalités. Leur importance dans le barême doit probablement être nulle, ou presque. On remarque donc que (e_1, e_2) sont deux éléments de $\mathbb{Z}^2$, et que tout élément $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{Z}^2$ s'écrit de manière unique $ae_1 + be_2$.

II.1. Le produit matriciel AX donne le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{pmatrix}$. D'autre part, le vecteur $xe'_1 + ye'_2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{pmatrix}$. D'où l'équivalence !

II.2.a. Évident ?

II.2.b. Les vecteurs e_1 et e_2 sont des vecteurs de $\mathcal{R}$ et (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$. Le résultat est alors une conséquence immédiate du deuxième point de la définition d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

II.2.c. Il est bon d'interpréter cette question de façon algébrique. Si on sait que (e'_1, e'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ (ici, on parle de base d'espace vectoriel), alors A est la matrice de passage de la base canonique à la base (e'_1, e'_2) et B est la matrice de passage de la base (e'_1, e'_2) à la base canonique. La propriété que l'on demande de démontrer est alors une conséquence des formules de changement de base.
Malheureusement, à ce stade du problème, on ne sait pas si (e'_1, e'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. On va cependant s'inspirer de nos connaissances en algèbre linéaire pour démontrer le résultat. Remarquons que $Be_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et notons $X_1 = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Alors d'après le résultat de la question II.1, $X_1 = x_1e'_1 + y_1e'_2 = e_1$, c'est-à-dire que $ABe_1 = e_1$. De la même façon, on prouve que $ABe_2 = e_2$. On en déduit alors que $AB = I_2$...par exemple, en écrivant $AB = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$ et en remarquant que $ABe_1 = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ ce qui permet de démontrer que $u = 1$ et $w = 0$. On procède de même pour démontrer que $v = 0$ et $z = 1$ en utilisant e_2.

II.2.d On utilise trois outils :
- le déterminant du produit de deux matrices est le produit du déterminant de chaque matrice ;
- le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est un entier (très facile ici puisqu'on a affaire qu'à des matrices 2×2) ;
- si n et m sont deux entiers tels que $n \times m = 1$, alors $n = \pm 1$ et $m = \pm 1$.

II.3.a Rappelons qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Ainsi, A est inversible. De plus, on sait calculer l'inverse d'une matrice 2×2. On a ici :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(A) = \pm 1$, les coefficients de A^{-1} sont bien tous des entiers relatifs.

II.3.b. Les vecteurs e'_1 et e'_2 sont bien des vecteurs de $\mathcal{R}$. De plus, prenons $X \in \mathcal{R}$ et notons $Y = A^{-1}X \in \mathcal{R}$ d'après la question précédente. On pose $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de Y. Alors $X = AY$ s'écrit $X = xe'_1 + ye'_2$ d'après la question I.1. De plus, cette écriture est unique. En effet, si X s'écrit aussi $X = x'e'_1 + y'e'_2$, alors notons $Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a alors

$$X = AY' = AY \implies A^{-1}AY' = A^{-1}AY \implies Y = Y' \implies x = x' \text{ et } y = y'.$$

Une autre façon de procéder est d'utiliser le cours d'algèbre linéaire. Puisque la matrice A est inversible, on peut désormais dire que (e'_1, e'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ (au sens espace vectoriel), ce qui entraîne en particulier l'unicité de l'écriture (l'existence ne pouvait s'en déduire aussi facilement car on n'aurait pas forcément obtenu des coordonnées entières)

II.4. On a prouvé que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ si et seulement si, en utilisant les notations de l'énoncé, la matrice A associée est à coefficients entiers et son déterminant vaut ± 1.

III.1. Soit $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ de sorte que (e'_1, e'_2) soit une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$. Alors, en gardant les notations de la question précédente,

$$\det(A) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1.$$

Par le théorème de Bezout, a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

III.2. Miracle ! Le théorème de Bezout est une condition nécessaire et suffisante, et la condition écrite à la question II.4. aussi ! Ainsi, si a_1 et b_1 sont premier entre eux, il existe des entiers relatifs a_2 et b_2 de sorte que $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$ et donc le vecteur $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ est tel que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

III.3. On doit trouver une solution particulière à une équation de Bezout extrêmement simple ! Par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ convient !

Partie B

I. Le sens réciproque est évident, et pour le sens direct, on remarque que $f(e_1) \in \mathcal{R}$ entraîne que la première colonne de la matrice A est à coefficients entiers.

II.1. L'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ contient e_1 et e_2.

II.2. Si $\mathrm{Im}(f)$ contient deux vecteurs indépendants, il contient l'espace vectoriel qu'ils engendrent (car f est une application linéaire). Mais on travaille dans $\mathbb{R}^2$ et l'espace vectoriel engendré par deux vecteurs indépendants est $\mathbb{R}^2$ tout entier. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et f est surjective. Puisque f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie (en particulier, une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de même dimension), sa surjectivité entraîne sa bijectivité. Donc f est bijective.

II.3. Pour toute application bijective de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$, on a $f^{-1}(f(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$. Le résultat que l'on demande de démontrer est une conséquence de cette propriété pour $\mathcal{E} = \mathcal{R}$, sachant que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, et on démontre même plus fort que ce qui est demandé par l'énoncé puisqu'on prouve l'égalité.

II.4. A est inversible car f est bijective, et les coefficients de A^{-1} sont des entiers relatifs car A^{-1} est la matrice de f^{-1} et car on peut appliquer les résultats de B.II.3. et B.I.

II.5 Le raisonnement est identique à celui de la question A.II.2.d.

III.1. C'est une conséquence immédiate de A.II.3.b.

III.2. Il suffit de démontrer que $\mathcal{R} \subset f(\mathcal{R})$, l'autre inclusion ayant été prouvée à la question I. Prenons $X \in \mathcal{R}$. Puisque $(f(e_1), f(e_2))$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$, on a $X = af(e_1) + bf(e_2) = f(ae_1 + be_2)$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Puisque $Y = ae_1 + be_2 \in \mathcal{R}$ et que $X = f(Y)$, on a bien $\mathcal{R} \subset f(\mathcal{R})$.

IV. On a prouvé que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ si et seulement si A est une matrice à coefficients entiers relatifs dont le déterminant vaut ± 1.

Partie C

La rédaction du problème pour cette partie comporte une vraie difficulté : le mélange entre l'affine et le vectoriel. Ainsi, l'énoncé mélange sans vergogne le calcul de $f(O)$, où O est un point, et celui de $f(e_1)$, où e_1 est un vecteur. Contraint et forcé, je vais suivre cet amalgame...

I. Le plus facile pour démontrer qu'un ensemble donné est un groupe, c'est de démontrer que c'est un sous-groupe d'un groupe connu. Ici, on sait que l'ensemble des isométries affines de $\mathbb{R}^2$ est un groupe. Démontrons que G, qui est contenu dans ce groupe, en est un sous-groupe. L'élément neutre (l'application identité) est bien un élément de G. Prenons $f, g \in \mathcal{R}$. Alors $g \circ f$ est une isométrie affine (on le savait déjà !) et de plus,

$$g \circ f(\mathcal{R}) = g\big(f(\mathcal{R})\big) = g(\mathcal{R}) = \mathcal{R}.$$

Ainsi, $g \circ f \in G$. De plus, si $f \in G$, alors f^{-1} est bien une isométrie affine (ça aussi, on le savait déjà !) et en plus $f^{-1}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$: en effet,

$$f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \implies f^{-1}(f(\mathcal{R})) = f^{-1}(\mathcal{R})$$

et, comme on l'a déjà utilisé dans la partie B,

$$f^{-1}(f(\mathcal{R})) = \mathcal{R}.$$

On procède de même pour G_0.

II.1. Ce sont les points $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

II.2. Puisque f est une isométrie et que $f(O)=O$, $f(e_1)$ doit être à distance 1 de O donc être égal à un des quatre éléments précédents.

II.3. L'idée est simple. On choisit pour $f(e_1)$ l'un des quatre choix possibles. Une fois ce choix fait, il n'en reste plus que deux pour $f(e_2)$, puisqu'on ne veut pas que $f(e_2)=f(e_1)$ ou que $f(e_2)=-f(e_1)$. Puisque $4\times 2=8$, on trouve les huit matrices mentionnées par l'énoncé (la première correspond à $f(e_1)=e_1$ et $f(e_2)=e_2$, la seconde à $f(e_1)=-e_1$ et $f(e_2)=e_2$,...).

III.1. On a $s_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$. s_1 est donc la symétrie (orthogonale) d'axe $y=x$. Quant à s_2, il s'agit de la symétrie orthogonale d'axe $x=0$ (l'ordonné est inchangée, l'abscisse est transformée en son opposé).

III.2. La matrice de $s_1\circ s_2$ est la matrice $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. On reconnait la matrice de la rotation de centre O (on a affaire à une application linéaire !) et d'angle $-\pi/2$. De même, la matrice de $s_2\circ s_1$ est $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, qui est la matrice de la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. Question subsidiaire : quelle est la matrice de la rotation d'angle θ ? ? ? ? Réponse : c'est

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

III.3. Évident ?

III.4. Puisque s_1 et s_2 sont dans G_0, leurs composées sont aussi dans G_0. Donc les applications linéaires dont les matrices sont la deuxième, la cinquième, la sixième ou la septième qui apparait dans H sont éléments de G_0. Ensuite, l'identité est dans G_0 ainsi que la symétrie centrale de centre O (ceci nous donne le premiere et le quatrième élément de H). Notons s_3 cette dernière symétrie. Alors en calculant la matrice de $s_3\circ s_1\in G_0$ et celle de $s_3\circ s_2\in G_0$, on obtient les deux matrices manquantes.

IV. Les éléments de G_0 sont les éléments dont la matrice dans la base canonique appartient à H. Demande-t-on en plus la nature géométrique des éléments de G_0 ? On l'a déjà fait pour six d'entre elles. Il est laissé au lecteur la nature géométrique de l'application correspondant à la troisième matrice et à la huitième (on trouve respectivement la symétrie orthogonale d'axe $x=0$ et la symétrie d'axe $y=-x$).

V. Remarquons que t est une isométrie affine. On a donc $t\in G\iff t(\mathcal{R})=\mathcal{R}$. Mais si $t\in G$, alors $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t(O)\in\mathcal{R}$. Réciproquement, si $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{R}$, alors, d'une part $t(\mathcal{R})\subset\mathcal{R}$ puisque si $X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathcal{R}$, $t(X)=\begin{pmatrix}a+x\\b+y\end{pmatrix}\in\mathcal{R}$. D'autre part, tout élément $X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ de $\mathcal{R}$ s'écrit $X=t(Y)$ avec $Y=\begin{pmatrix}a-x\\b-y\end{pmatrix}\in\mathcal{R}$ et donc $\mathcal{R}\subset t(\mathcal{R})$. La condition $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{R}$ caractérise bien le fait que t appartienne à G.

VI. Que t' appartienne à G est une conséquence directe de la question précédente. De plus, $g=t'\circ f\in G$ puisque G est un groupe, et $g(O)=t'(f(O))=O$ entraîne que g est un élément de G_0.

VII. L'existence vient de la question précédente, en remarquant que si $t \in G$ est une translation de vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$, alors t^{-1} est une translation de vecteur $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$. L'unicité vient du fait que si $f = t_1 \circ g_1 = t_2 \circ g_2$, alors $f(O) = t_1(O) = t_2(O)$ et donc les deux translations t_1 et t_2 sont identiques (ce sont les translations de vecteur $f(O)$). On en déduit alors que $g_1 = g_2 = t_1^{-1} \circ f$.

Partie D Je vais aller assez vite dans les corrections des deux dernières parties, sans doute très peu abordées par les candidats !

I.1. On commence par remarquer que le carré C est invariant par chacune des huit isométries de G_0 (il suffit d'essayer pour chacune). Ceci démontre en particulier, puisque T est inclus dans C, que $\bigcup_{g \in G_0} g(T) \subset C$. Ensuite, on reconstruit facilement C à partir de T et des isométries de G_0 : si g_1 est la symétrie d'axe $y = x$, on construit d'abord l'intersection du carré et du quart de plan $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Ensuite, par la symétrie d'axe $x = 0$, on construit la partie droite du carré. Puis, par la symétrie d'axe $y = 0$, on construit tout le carré.

I.2. Cela me semble plus délicat. Notons $g = g_1^{-1} \circ g_2 \in G_0$, $g \neq Id$, et $\mathcal{E} = g_1(T) \cap g_2(T)$. Alors

$$g^{-1}(\mathcal{E}) = T \cap g(T).$$

Puisque l'image d'un point par une transformation affine est un point, et que l'image d'un segment par une transformation affine est un segment, il suffit de démontrer que l'intersection de T et de $g(T)$, où g est un élément de G_0 différent de l'identité, est soit un segment, soit un point. Là encore, il suffit d'essayer avec les huit éléments de G_0.

II.1. Pour $a, b \in \mathbb{Z}^2$, notons $C_{a,b}$ la surface délimitée par le carré de sommets

$$\begin{pmatrix} a + \frac{1}{2} \\ b + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2} \\ b + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2} \\ b - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2} \\ b - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors il est clair (cela demande-t-il une justification ?) que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2} C_{a,b}.$$

Puisque $C_{a,b} = t_X(C)$, où t_X est la translation de vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$, on a le résultat.

II.2. Notons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. Alors on distingue plusieurs cas :

— Si $a = a'$ et $|b - b'| = 1$, alors $t_X(C) \cap t_Y(C)$ est un segment (horizontal).
— Si $|a - a'| = 1$ et $b = b'$, alors $t_X(C) \cap t_Y(C)$ est un segment (vertical).
— Si $|a - a'| = 1$ et $|b - b'| = 1$, alors $t_X(C) \cap t_Y(C)$ est un point (un sommet commun aux deux carrés).
— Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si $|a - a'| > 1$ ou $|b - b'| > 1$, alors $t_X(C) \cap t_Y(C)$ est vide.

III.1. Savez-vous voir pourquoi c'est une conséquence immédiate des questions I.1 et II.1 de cette partie ?

III.2. Notons $f_1 = t_1 \circ g_1$ et $f_2 = t_2 \circ g_2$. Distinguons deux cas :

— Premier cas : $t_1 = t_2$. Alors $f_1(T) \cap f_2(T) = t_1(g_1(T) \cap g_2(T))$ et le résultat est une conséquence de la question I.1.

— Deuxième cas : $t_1 \neq t_2$. Si $f_1(T) \cap f_2(T) \neq \varnothing$, alors, puisque $g_1(T) \subset C$ et $g_2(T) \subset C$, on a $t_1(C) \cap t_2(C) \neq \varnothing$. Puisque $t_1 \neq t_2$, la question précédente nous dit que $t_1(C) \cap t_2(C)$ est soit un segment, soit un point. Ainsi, $f_1(T) \cap f_2(T)$ est contenu soit dans un segment, soit dans un point, tout en étant non vide. Mais $f_1(T)$ est un triangle, et $f_2(T)$ est un triangle, et l'intersection de deux triangles contenue dans un point ou dans un segment est un point ou un segment.

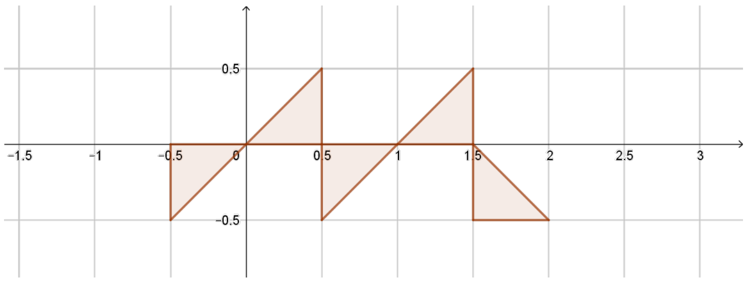
Partie E

I.1. t_k est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ tandis que s_k est la symétrie centrale de centre $(k/2, 0)$ (indication : commencer par chercher les points invariants par s_k).

I.2. On a $t_k \circ s_l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + (l+k) \\ -y \end{pmatrix}$ de sorte que $t_k \circ s_l = s_{l+k}$. On démontre de même que $s_k \circ t_l = s_{k-l}$, $s_k \circ s_k = t_{k-l}$ et que $t_k \circ t_l = t_{k+l}$.

II. H contient l'identité t_0. La question précédente nous prouve que la composée de deux éléments de H reste dans H. Enfin, des formules $t_k \circ t_{-k} = t_0$ et $s_k \circ s_k = t_0$, on déduit que l'inverse d'un élément de H est dans H. Ainsi, H est bien un sous-groupe de G.

III. L'ensemble F est une frise, de motif élémentaire le triangle T, et dont le groupe des isométries est H. La figure ci-dessous donne la frise :



IV. Le groupe des isométries laissant invariant la frise est le groupe constitué

— des symétries centrales de centre $(k/2, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$;

— des symétries d'axe $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$;

— des translations de vecteur $\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deuxième problème

I.1. Les symétries sont des involutions. Donc la fonction $\varphi(x) = -x$ convient ! Attention ici au fait qu'on demande de travailler avec des involutions de $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction inverse ne convient pas !

I.2. C'est ici que l'exemple $\varphi(x) = 1/x$ convient !

I.3. On peut utiliser un résultat du cours : si $f : I \to J$ et $g : J \to I$ sont tels que $f \circ g = Id_J$ et $g \circ f = Id_I$, alors f est une bijection et $f^{-1} = g$. C'est exactement ce que l'on a ici avec $g = f = \varphi$. Si on veut redémontrer ce résultat dans le cas particulier qui nous intéresse, alors

— φ est injective. Si $\varphi(x) = \varphi(y)$, alors

$$x = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(\varphi(y)) = y.$$

— φ est surjective. Si $y \in I$, alors posons $x = \varphi(y)$. On a bien

$$y = \varphi(\varphi(y)) = \varphi(x).$$

II.1. En appliquant la relation (a) avec $x = 1$ et respectivement $y = y_1$ puis $y = y_2$, on a

$$y_1 f(1) = f(1f(y_1)) = f(1f(y_2)) = y_2 f(1).$$

II.2. $f(1)$ est non-nul....

II.3. On utilise la relation avec $x = y = 1$, puis le fait que f est injective !

II.4. Il s'agit simplement de réécrire la relation (a) avec $y = 1$ et d'utiliser que $f(1) = 1$.

II.5. Posons $y = f(b)$. Alors la relation (a) appliquée à $x = a$ et $y = f(b)$ et le fait que f est involutive, et donc que $f(f(b)) = b$, donnent le résultat.

III.1. On applique la relation (a) avec $y = x$. Il vient

$$f(xf(x)) = xf(x)$$

et donc $xf(x) \in F$.

III.2. C'est la question II.3.

III.3. Si x et y sont deux éléments de F, alors

$$f(xy) = f(x)f(y) = xy$$

et donc $xy \in F$. Écrivons ensuite $x = y \times \frac{x}{y}$. Alors

$$x = f(x) = f\left(y \times \frac{x}{y}\right) = f(y)f\left(\frac{x}{y}\right) = yf\left(\frac{x}{y}\right) \implies f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}.$$

Ainsi, on a aussi $x/y \in F$.

III.4. Il suffit de faire une récurrence très facile utilisant la question 2 (n'oublions pas que 0 est un entier naturel) et la question 3.

III.5. Supposons que x soit un élément de F avec $x > 1$. Alors $f(x^n) = x^n \to +\infty$ quand n tend vers l'infini, ce qui contredit le fait que f est majorée.

III.6. Supposons qu'il existe $x \in F$ avec $x \in]0,1[$. Alors, puisque $1 \in F$, on a d'après la question III.3. que $1/x \in F$ avec $1/x > 1$. Ceci contredit le résultat de la question précédente. Donc $F \subset \{1\}$. On a déjà prouvé l'inclusion réciproque plus tôt.

III.7. En combinant les réponses aux question III.1 et III.6, on voit que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = 1/x$. Ainsi, f est l'application inverse.

IV. On a vu que si f vérifie les conditions imposées par l'énoncé, f est l'application inverse. Réciproquement, l'application inverse vérifie bien ces conditions. La seule application répondant au problème posé est donc l'application inverse.