Avertissement : Ceci n'est pas une correction *in extenso* du problème de capes. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Ces deux problèmes utilisent des outils mathématiques assez élémentaires. Le premier nécessite de bien comprendre la méthode d'Euler et de savoir manipuler des algorithmes. Le second est un problème de probabilités très classique, où les manipulations algébriques peuvent être assez lourdes.

Premier problème

Partie A

I. $t_k = 3k/n$.

II. $\mathcal{D}_k$ est la droite passant par (t_k, y_k) et de coefficient directeur $F(y_k)$. Elle admet donc pour équation :

$$y - y_k = F(y_k)(t - t_k).$$

Ici, on a $F(y) = -0,04(y - 22) = -0,04y + 0,88$.

III. Puisque (t_{k+1}, y_{k+1}) est sur la droite $\mathcal{D}_k$, on doit avoir

$$y_{k+1} - y_k = (-0,04y_k + 0,88)(t_{k+1} - t_k) = (-0,04y_k + 0,88) \times \frac{3}{n}.$$

Ceci entraine

$$y_{k+1} = \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{2,64}{n}.$$

Ces premières questions n'ont rien de difficile, mais elles peuvent être légèrement déstabilisantes car il faut prendre le temps de comprendre l'énoncé et notamment la signification de la méthode d'Euler.

IV.1. Plusieurs possibilités de réponse. Il a pu répondre

```
=(1-0,12/$B$3)*B6+2,64/$B$3
```

qui correspond exactement à la formule trouvée à la question précédente, mais ne permet pas de faire des tests en changeant la température ambiante. Si, dans l'expression de F, on pose plutôt $F(y) = -0,04(y - T_a)$, on a alors

$$y_{k+1} = \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{3 \times 0,04 \times T_a}{n}.$$

La formule à rentrer devient alors

```
=(1-0,12/$B$3)*B6+(3*0,04*$B$1)/$B$3
```

On pourrait encore dire que cela n'utilise pas B2, mais spontanément je mettrais B6 égal à B2 plutôt....

IV.2. Il suffit de modifier la valeur entrée dans la case B6, pour que l'on tienne compte du fait que l'on verse immédiatement du lait. Dans B6, on peut rentrer

```
=(15*B2+3*B1)/18.
```

On pourrait même ajouter des cellules supplémentaires pour faire varier les quantités de café et de lait ajoutées.

V.1. Voici un algorithme testé sous Algobox :

```
VARIABLES
   T EST_DU_TYPE NOMBRE
   n EST_DU_TYPE NOMBRE
   k EST_DU_TYPE NOMBRE
 DEBUT_ALGORITHME
   LIRE T
   LIRE n
   POUR k ALLANT_DE 1 A n
     DEBUT_POUR
     T PREND_LA_VALEUR (1-0.12/n)*T+2.64/n
     FIN_POUR
   AFFICHER T
 FIN_ALGORITHME
```

V.2. Pour déterminer la température du café de Bertrand, on exécute l'algorithme avec $T_0 = 48$. Algobox répond (environ) 45,0516. On mélange avec le lait, et la température obtenue vérifie

$$\frac{45,0516 \times 15 + 22 \times 3}{18} \simeq 41,2097.$$

Pour déterminer la température du café d'Aline, on exécute directement l'algorithme avec $T_0 = (15 * 48 + 3 * 22)/18$. Algobox répond (environ) $41,2097$. Il semblerait donc que les deux méthodes donnent la même température de café...

Partie B

I. Rappelons la méthode pour résoudre ce type d'équations différentielles. On cherche d'abord les solutions de l'équation homogène, on cherche ensuite une solution particulière, puis on ajuste la constante pour que la solution vérifie le problème de Cauchy. Ici, on a une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On sait avant de commencer la résolution que le problème de Cauchy admet une solution unique.
L'équation homogène est $y'(t) = -0,04y(t)$. Ses solutions sont les fonctions $y_H(t) = Ce^{-0,04t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'une fonction constante. En effet, si $y(t) = \lambda$, alors y est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$0 = -0,04(\lambda - 22) \iff \lambda = 22$$

(merci au concepteur du sujet d'avoir écrit l'équation en ayant déjà factorisé par 0,04 !). Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$y(t) = Ce^{-0,04t} + 22.$$

La condition $y(0) = \alpha$ est vérifiée si et seulement si $C + 22 = \alpha$, c'est-à-dire si et seulement si $C = \alpha - 22$. On a donc prouvé que la solution au problème de Cauchy est la fonction

$$y(t) = (\alpha - 22)e^{-0{,}04t} + 22.$$

1. Pour déterminer la valeur de la température du café d'Aline, on applique l'algorithme avec $\alpha = (15 \times 48 + 3 \times 22)/18$, et on trouve, à 10^{-2} près, 41,22 degrés celsius (très proche de ce que la méthode d'Euler nous avait donné). Pour déterminer la valeur de la température du café de Bertrand, on commence par calculer $y(3)$ pour $\alpha = 48$, soit

$$y(3) = 26e^{-0{,}04\times 3} + 22.$$

La température du café de Bertrand est alors, en degrés celsius,

$$\frac{15y(3) + 3 \times 22}{18} \simeq 41,22$$

à 10^{-2} près. En fait, si on creuse un peu plus, on a d'un côté (Bertrand)

$$\frac{15 \times (26e^{-0{,}12} + 22) + 66}{18} = \frac{65\exp(-0,12)}{3} + 22$$

et de l'autre (Aline)

$$\left(\frac{15 \times 48 + 3 \times 22}{18} - 22\right)\exp(-0,12) + 22 = \frac{65\exp(-0,12)}{3} + 22.$$

On trouve ainsi exactement le même résultat...
J'avoue que je suis un peu dubitatif concernant les questions A.V.2 et B.II. Quel candidat aura eu le courage et le temps d'implémenter l'algorithme sur sa calculatrice et de mener les calculs jusqu'à leur terme ? En plus, les résultats obtenus sont plutôt déroutants...

Partie C

I.1. On a déjà fait cette question, c'est A.III.

I.2. C'est très gentil, on a

$$\ell = \frac{b}{1-a} = \frac{2,64}{0,12} = 22.$$

I.3. C'est très très gentil. Tout candidat au capes devrait savoir traiter une suite arithmético-géométrique sans avoir besoin d'indications. Posons $z_k = y_k - \ell$. On vérifie que (z_k) est une suite géométrique de raison a. On en déduit que

$$z_n = a^n z_0 \implies y_n = \ell + a^n(y_0 - \ell) = 22 + 26\left(1 - \frac{0,12}{n}\right)^n.$$

II. Il y a un petit piège, car il y a une vraie forme indéterminée du type 1^∞. On lève cette indétermination en passant au logarithme. On a

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{0,12}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{0,12}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(n \times \frac{-0,12}{n} + o(1)\right)\\ &\to \exp(-0,12).\end{aligned}$$

On en déduit que $T_n(3)$ converge vers $22 + 26\exp(-0,12) = T(3)$.

III. Pour obtenir un équivalent, il faut aller un cran plus loin dans le développement limité du logarithme, et faire attention à avoir une rédaction correcte ! On a

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{0,12}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{0,12}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(n\times\frac{-0,12}{n}-n\times\frac{(0,12)^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(-0,12-\frac{(0,12)^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \exp(-0,12)\exp\left(-\frac{(0,12)^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \exp(-0,12)\left(1-\frac{(0,12)^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$T_n(3)-T(3)=\frac{-26\times(0,12)^2\exp(-0,12)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

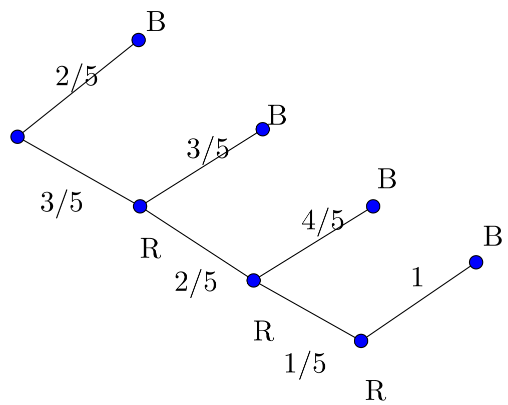
c'est-à-dire

$$T_n(3)-T(3)\sim\frac{-13\times(0,12)^2\exp(-0,12)}{n}.$$

J'espère ne pas avoir fait d'erreurs ! ! !

Deuxième problème

Partie A



I.1.

I.2.a. X peut prendre les valeurs $1, 2, 3, 4$.

I.2.b. Je ne sais pas trop comment rédiger cette question. Peut-on s'appuyer uniquement sur l'arbre, et faire comme un élève de lycée le ferait (ce début de problème est tout à fait réalisable au lycée). Ou bien faut-il une justification plus précise, comme on le fera par la suite ? Je choisis plutôt la première option. On remarque d'abord que X prend la valeur 1 avec la probabilité 2/5. On a ensuite $X = 2$ si le premier tirage a amené une boule rouge et le second une boule blanche. La probabilité que le premier tirage donne une boule rouge est 3/5. La probabilité que le second tirage donne une boule blanche sachant que le premier donne une boule rouge est 3/5 également. On a donc $P(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$. On a ensuite $P(X = 3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{125}$ et enfin $P(X = 4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{125}$. Bien sûr on peut et on doit vérifier que

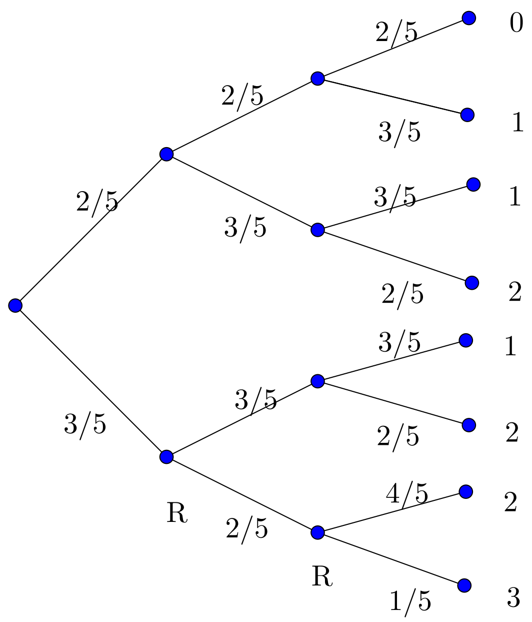
$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1.$$

On a ensuite

$$E(X) = 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) \simeq 1,88.$$

En moyenne, la première boule sortira après environ 1,88 tirages.

II.1. C'est un petit peu pénible à faire sur un ordinateur ; toutes les branches qui vont vers le haut dans l'arbre suivant désigne le tirage d'une boule blanche, toutes les branches qui vont vers le bas le tirage d'une boule rouge. J'ai indiqué à l'extrémité droite le nombre de boules rouges obtenus.



II.2.a. Y prend les valeurs 0,1,2,3.

II.2.b. On a :

$$P(Y = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}.$$

$$P(Y = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{57}{125}.$$

$$P(Y = 2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{54}{125}.$$

$$P(Y=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{125}.$$

Comme précédemment, la somme fait bien 1. L'espérance de Y est

$$E(Y)=\frac{57}{125}+2\frac{54}{125}+3\frac{6}{125}\simeq 1,46.$$

En moyenne, ces trois tirages amènent 1,46 boules rouges.

III.1. Cet algorithme simule le protocole de tirage d'une boule dans l'urne. Il le simule en numérotant les boules, et en disant que les boules 1 à b sont les boules blanches, et les autres les boules noires. Il ajuste le nombre de boules dans l'urne.

III.2. On peut modifier (plutôt que compléter) l'algorithme de la façon suivante :

```
X<-0
b<-2
r<-3
résultat<-rouge
Tant que (résultat est différent de blanche) Faire
  X<-X+1
  d<-alea(1..5)
  si (d>b) alors
    résultat<-rouge
    b<-b+1
    r<-r-1
  sinon
    résultat<-blanche
  Fin si
Fin Tant que
Afficher X
```

Partie B

I.1. On a $E=\{1,2,\dots,r+1\}$: à chaque tirage on retire une boule rouge, on ne peut donc pas tirer plus de r boules rouges.

I.2. On a

$$(X=k)=A_1\cap\dots\cap A_{k-1}\cap\overline{A_k}.$$

I.3.a. $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$.

I.3.b. Pour $j\leq i-1$, on a $B_1\cap\dots\cap B_{i-1}\subset B_1\cap\dots\cap B_j$ et donc $P(B_1\cap\dots\cap B_j)\geq P(B_1\cap\dots\cap B_{i-1})>0$. Démontrons ensuite, par récurrence finie sur $j\in\{1,\dots,i\}$ la propriété

$$\mathcal{P}(j)=\text{''}P(B_1\cap\dots B_j)=P(B_1)P(B_2|B_1)\cdots P(B_j|B_1\cap\dots\cap B_{j-1}).\text{''}$$

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit $j\leq i-1$ tel que $\mathcal{P}(j)$ est vraie, et prouvons $\mathcal{P}(j+1)$. On a

$$P(B_1\cap\dots B_{j+1})=P\big((B_1\cap\dots\cap B_j)\cap B_{j+1}\big)=P(B_{j+1}|B_1\cap\dots\cap B_j)P(B_1\cap\dots\cap B_j)$$

par définition des probabilités conditionnelles. On utilise ensuite que $\mathcal{P}(j-1)$ est vérifiée pour trouver que

$$P(B_1 \cap \dots B_{j+1}) = P(B_1)P(B_2|B_1)\cdots P(B_{j+1}|B_1 \cap \dots \cap B_j).$$

Autrement dit, la propriété $\mathcal{P}(j+1)$ est vérifiée. Par le principe de récurrence, on a bien démontré que $\mathcal{P}(i)$ est vraie.

I.4.a. D'après la question précédente, on a

$$P(X=k) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(\overline{A_k}|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}).$$

Mais $P(A_1) = r/(r+b)$, $P(A_2|A_1) = (r-1)/(r+b)$ et plus généralement $P(A_i|A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}) = (r-i+1)/(r+b)$. De plus, $P(\overline{A_k}|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) = (b+k-1)/(r+b)$. Finalement, on trouve que

$$P(X=k) = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+2)(b+k-1)}{(r+b)^k} = \frac{r!(b+k-1)}{(r-k+1)!N^k}.$$

I.4.b. D'après la formule précédente,

$$P(X=r+1) = \frac{r!}{(r+b)^r}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k} &= \frac{r!(N-(r-k+1))}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!(b+k-1)}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= P(X=k).
\end{aligned}$$

I.5.a. On coupe la somme en deux et on effectue un changement d'indices dans une des deux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k(p_{k-1}-p_k) &= \sum_{k=1}^n kp_{k-1} - \sum_{k=1}^n kp_k\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p_k - \sum_{k=1}^n kp_k\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)p_k + p_0 - np_n\\
&= \sum_{k=0}^n p_k - np_n.
\end{aligned}$$

I.5.b. On écrit simplement que

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{r+1} kP(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{r} k(p_{k-1}-p_k) + (r+1)P(X=r+1)
\end{aligned}$$

où $p_k = \frac{r!}{(r-k)!N^k}$. D'après la formule de la question précédente,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{r!}{(r-k)!N^k} - r\frac{r!}{N^r} + (r+1)\frac{r!}{N^r} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} \frac{k!}{N^k} + \frac{r!}{N^r} \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{k!}{N^k}. \end{aligned}$$

II.1.a.b. Pour $k > n$ ou $k > r$, on a $P(Y_n = k) = 0$.

II.1.c. L'événement $Y_n = 0$ correspond à l'événement $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$. On peut calculer la probabilité de cet événement en utilisant la formule de la question I.3.b., sachant que

$$P(\overline{A_k} | \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}) = \frac{b}{N}$$

(la composition de l'urne ne change pas au fil des expériences). On a donc

$$P(Y_n = 0) = \frac{b^n}{N^n}.$$

II.2. L'énoncé ne se pose pas le problème de l'existence de ces probabilité conditionnelle (il faut tout de même que $P(Y_{n-1} = i) > 0$, et donc au moins que $i \leq \min(n, r)$; on va jeter également un voile pudique sur ce problème éventuel). D'abord, on a $P(Y_n = k | Y_{n-1} = i) = 0$ si $k \neq i$ ou $k \neq i + 1$ (un tirage supplémentaire amène 0 ou 1 boule rouge supplémentaire). On remarque ensuite que si $Y_{n-1} = i$, alors pour le n-ième tirage, l'urne comporte $r - i$ boules rouges et $b + i$ boules blanches. On a donc

$$P(Y_n = k | Y_{n-1} = k) = \frac{b+k}{N} \text{ et } P(Y_n = k | Y_{n-1} = k-1) = \frac{r-(k-1)}{N}.$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y_n = k) &= \sum_{i=0}^{n-1} P(Y_n = k | Y_{n-1} = i) P(Y_{n-1} = i) \\ &= \frac{b+k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{r+1-k}{N} P(Y_{n-1} = k-1). \end{aligned}$$

L'énoncé nous donnait donc de façon un peu cachée la valeur des probabilités conditionnelles !

II.3. On utilise la formule précédente, on coupe la somme en deux sommes, et on fait un changement d'indices dans une de ces deux sommes :

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y_n = k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{b+k}{N}P(Y_{n-1}=k) + \sum_{k=1}^{n} k\frac{r+1-k}{N}P(Y_{n-1}=k-1)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{b+k}{N}P(Y_{n-1}=k) + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{r-k}{N}P(Y_{n-1}=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{kb+k^2+rk-k^2+r-k}{N}P(Y_{n-1}=k) + \frac{r}{N}P(Y_{n-1}=0)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(N-1)+r}{N}P(Y_{n-1}=k)
\end{aligned}$$

On écrit ensuite que

$$\frac{k(N-1)+r}{N} = k\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{r}{N}$$

pour conclure que

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{k=0}^{n-1} kP(Y_{n-1}=k) + \frac{r}{N}\sum_{k=0}^{n-1}P(Y_{n-1}=k)\\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)E(Y_{n-1}) + \frac{r}{N}\times 1.
\end{aligned}$$

II.4.a. Puisque l'énoncé nous donne la formule, il suffit de la vérifier par récurrence sur n, ce qui ne devrait pas trop poser de problèmes à partir du résultat de la question précédente (au début de II., l'énoncé ne parlait de Y_n que pour $n > 0$, il semble désormais inclure aussi le cas $n = 0$...). Remarquons qu'à nouveau ici on a affaire à une suite arithmético-géométrique.

II.4.b. C'est presque cadeau... Puisque $\left|1-\frac{1}{N}\right| < 1$ (attention à ne pas oublier la valeur absolue), on sait que $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$ tend vers 0, d'où on déduit très facilement que $(E(Y_n))$ converge vers r. L'existence d'un tel entier n_0 est alors une conséquence immédiate de la définition de la convergence de la suite vers r, par exemple avec l'intervalle $]r-1/4, r+1/4[$.

III.1. On commence par supposer que $k \leq r$ (par hypothèse, on doit avoir $k \leq n-1$). Les événements $(Y_k = 0)$, $(Y_k = 1)$, jusque $(Y_k = k)$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$\begin{aligned}
P(A_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{k} P(A_{k+1}|Y_k = i)P(Y_k = i)\\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{r-i}{N}P(Y_k = i)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la composition de l'urne lorsque l'on a déjà tiré i boules rouges. Cette formule reste valable si $k > \min(n, r)$. Le système complet d'événements que l'on considère est $(Y_k = 0)$, $(Y_k = 1)$, jusque $(Y_k = r)$, et on obtient le résultat avec la somme jusqu'au rang r. On peut la compléter jusqu'au rang k, car alors on ajoute des termes nuls.

III.2. On continue le calcul, et on trouve

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{r}{N} P(Y_k = i) - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{k} i P(Y_k = i) \\ &= \frac{r}{N} - \frac{1}{N} E(Y_k) \\ &= \frac{r}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k . \end{aligned}$$

IV.1. Le théorème de transfert nous dit simplement que

$$E(Y_n(Y_n - 1)) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) P(Y_n = k).$$

On utilise ensuite comme on nous le propose le résultat de B.II.2. et on fait un calcul un peu "bourrin" en coupant, presque comme d'habitude maintenant, la somme en deux et en effectuant un changement d'indices. On trouve

$$\begin{aligned} E(Y_n(Y_n - 1)) &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \left(\frac{b+k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{r+1-k}{N} P(Y_{n-1} = k-1) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)(b+k)}{N} P(Y_{n-1} = k) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)(r+1-k)}{N} P(Y_{n-1} = k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)(b+k)}{N} P(Y_{n-1} = k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)k(r-k)}{N} P(Y_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\big((k-1)(b+k) + (k+1)(r-k)\big)}{N} P(Y_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(kN + r - b - 2k)}{N} P(Y_{n-1} = k). \end{aligned}$$

C'est le même résultat que celui proposé par l'énoncé, puisque

$$(k-1)(N-2) + 2(r-1) = kN - N + 2r - 2k = kN + r - b - 2k.$$

Ouf !

IV.2. C'est plus facile que cela en a l'air ! On coupe le dénominateur de la fraction en deux, on obtient deux sommes, et on repère facilement que la première somme est égale à $\frac{N-2}{N} E(Y_{n-1}(Y_{n-1} - 1))$ (grâce au théorème de transfert again) et que la deuxième somme vaut $\frac{2(r-1)}{N} E(Y_{n-1})$.

IV.3. Si vous êtes arrivés à ce point du problème, cette récurrence ne devrait plus vous poser de problèmes !

IV.4. On sait que
$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n).$$
Pour arriver à la forme demandée, il suffit d'écrire $Y_n^2 = Y_n(Y_n - 1) + Y_n$ et on trouve
$$V(Y_n) = E(Y_n(Y_n - 1)) + E(Y_n) - E(Y_n)^2.$$
Attention à la place des carrés !

IV.5. Il suffit de combiner les calculs précédents ?!? (j'avoue manquer de courage pour taper les calculs...)

V.1. La limite est nulle, je vous laisse le justifier (mais on a déjà fait une justification proche auparavant...).

V.2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) \leq \frac{V(Y_n)}{\alpha^2}.$$
On conclut alors par le théorème des gendarmes et le résultat de la question précédente.

V.3. D'après l'inégalité triangulaire, qui dit aussi que $|a - b| \geq |a| - |b|$, et en écrivant
$$Y_n - E(Y_n) = (Y_n - r) - (E(Y_n) - r),$$
on a
$$|Y_n - E(Y_n)| - |E(Y_n) - r| \leq |Y_n - E(Y_n)|.$$
Ainsi, l'événement $|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha$ contient l'événement $|Y_n - E(Y_n)| - |E(Y_n) - r| \geq \alpha$. Ceci implique que
$$0 \leq P(|Y_n - E(Y_n)| - |E(Y_n) - r| \geq \alpha) \leq P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha).$$
On conclut à nouveau par le théorème des gendarmes.

V.4. On va démontrer que les deux événements $Y_n \neq r$ et $|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha$ sont égaux. Remarquons d'abord que si $Y_n \neq r$, alors, puisque Y_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $|Y_n - r| \geq 1$. Mais $\alpha + |r - E(Y_n)| \leq 3/4$ pour $n \geq n_0$ et donc $|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha$. Réciproquement, si $|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha$, alors $|Y_n - r| \geq \alpha = 1/2$ et donc $Y_n \neq r$. Les deux événements $Y_n \neq r$ et $|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha$ sont égaux et ont donc même probabilité.

V.5. On vient de démontrer que $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \neq r) = 0$. Si le nombre de tirages tend vers l'infini, presque sûrement on va tirer toutes les boules rouges (ce qui est intuitif).