AVERTISSEMENT : Ceci n'est pas une correction *in extenso* du problème de capes. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Premier problème

Partie A

A.I.1. Écrivons le nombre complexe z sous la forme $z = x + iy$. Alors on a

$$\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

la dernière inégalité étant une conséquence de la croissance de la fonction racine carrée. Pour déterminer les cas d'égalité, la méthode est simple : on repère toutes les inégalités utilisées, et on aura égalité si et seulement si ces inégalités sont des égalités. Ici, les deux inégalités utilisées sont $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)|$ et $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. On a donc égalité si et seulement si $|x| = x$ et $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq 0$ et $y = 0$. On a donc égalité si et seulement si z est un réel positif ou nul.

A.I.2. C'est une question de cours et le jury y a été très attentif. Quand on travaille avec des modules, on a tout intérêt à se souvenir que ce qui est facile à calculer, c'est le carré du module. Tout étant positif, il suffit ici de démontrer que $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. Mais on a

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \times \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z_2} + z_2 \bar{z_1} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{z_1} z_2), \\ (|z_1| + |z_2|)^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2|. \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le résultat de la première question à $z = \bar{z_1} z_2$, puisque $|z_1 z_2| = |\bar{z_1} z_2|$.

A.I.3. C'est une question nettement plus difficile. On étudie la preuve de la question précédente pour savoir où on a utilisé des inégalités plutôt que des égalités. La seule inégalité utilisée est $\mathrm{Re}(\bar{z_1} z_2) \leq |\overline{z_1} z_2|$. D'après le résultat de la question A.I.1., on a égalité si et seulement si $\bar{z}_1 z_2$ est un réel positif ou nul. Puisque z_1, z_2 ne sont pas nuls, on a égalité si et seulement s'il existe $\mu > 0$ tel que $\overline{z_1} z_2 = \mu$. Il faut maintenant passer au résultat demandé. Pour cela, on peut aussi écrire $z_1 = re^{i\theta}$ de sorte que $\bar{z_1} = re^{-i\theta}$ ce qui entraine encore que

$$\frac{1}{\bar{z_1}} = \frac{1}{r} e^{i\theta} = \frac{1}{r^2} z_1.$$

Ainsi, on a démontré qu'on avait égalité si et seulement s'il existe $\mu > 0$ tel que

$$z_2 = \frac{\mu}{r^2} z_1.$$

Posant $\lambda = \mu / r^2$, on obtient le résultat. Il s'interprète en disant que z_1 et z_2 ont le même argument modulo 2π.

A.II.1. C'est la première récurrence du problème et, comme à chaque fois, il faut particulièrement soigner sa rédaction. Elle n'est pas si facile ici, car si on veut être précis, il faut faire attention à l'endroit où on définit les complexes $z_1, \dots, z_n$ et on a besoin de savoir que $\mathcal{P}(2)$ est vraie pour l'hérédité. Attention donc à ne pas initialiser qu'avec $\mathcal{P}(1)$! Pour $n \geq 1$, considérons $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\text{"}\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C},\ |z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.\text{"}$$

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie et la propriété $\mathcal{P}(2)$ a été vérifiée lors d'une question précédente. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $z_1, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes et posons $Z_1 = z_1 + \dots + z_n$, $Z_2 = z_{n+1}$. Puisque $\mathcal{P}(2)$ est vraie, on sait que

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|.$$

On utilise maintenant $\mathcal{P}(n)$ pour trouver que

$$|Z_1| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

On a donc bien prouvé $\mathcal{P}(n+1)$ et par le principe de récurrence, le résultat est démontré pour tout entier n.

A.II.2. Là encore, une récurrence s'impose et là encore, elle est un peu délicate. L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est cette fois :

$$\text{"}\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*,\ \left|\sum_{k+1}^n z_k\right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \iff \forall k \in \{1, \dots, n\},\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1.\text{"}$$

L'initialisation $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ ne pose pas de problèmes. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Comme précédemment, considérons $z_1, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes non-nuls et posons $Z_1 = z_1 + \dots + z_n$, $Z_2 = z_{n+1}$. De la chaine d'inégalités

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|,$$

on déduit que l'on a égalité si et seulement si $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ et $|\sum_{k=1}^n z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k|$. Ici, il faut faire attention ! On ne peut pas directement appliquer $\mathcal{P}(2)$ à $|Z_1 + Z_2|$ car pour le moment, rien ne nous dit que $Z_1 \neq 0$. On commence donc par appliquer $\mathcal{P}(n)$ à $|\sum_{k=1}^n z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ pour en déduire que, pour $k = 1, \dots, n$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$. On en déduit que $Z_1 = (1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) z_1$ est non-nul, et on peut donc appliquer $\mathcal{P}(2)$ à $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_{n+1} = \mu Z_1$. Posant $\lambda_{n+1} = \mu(1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$, on en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Il reste à écrire la conclusion du raisonnement par récurrence. L'interprétation en termes d'arguments est identique à I.3.

Partie B

I. Il suffit de prendre $z_1 = 1$, $z_2 = e^{2i\pi/3} = j$ et $z_3 = e^{-2i\pi/3} = j^2$. Remarquons qu'on a un exemple ici avec des nombres complexes de module 1. Plus généralement, on peut considérer pour $z_1, \dots, z_n$ les racines n-ièmes de l'unité.

II.1. Facile si on remarque que la propriété (iv) implique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} = 0.$$

II.2. On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |z_k| &= \left|\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}(z - z_k)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |u_k||z - z_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|.
\end{aligned}$$

II.3. (Plus difficile). Le seul endroit où on a écrit une inégalité dans la question précédente est lors de l'application de l'inégalité triangulaire. Il faut alors distinguer deux cas. Si z n'est égal à aucun des z_k, d'après le résultat de la question A.II.2., on a égalité si et seulement pour tout $k \geq 2$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\overline{u_k}(z - z_k) = \lambda_k \overline{u_1}(z - z_1)$. On va démontrer que ceci est équivalent à la propriété énoncée. Supposons donc que, pour tout $k \geq 2$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\overline{u_k}(z - z_k) = \lambda_k \overline{u_1}(z - z_1)$ et posons $\lambda_1 = 1$. D'après II.1., on sait que

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}(z - z_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{u_1}(z - z_1) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Puisque $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ est un réel strictement positif et que $-\sum_{k=1}^{n} |z_k|$ est un réel strictement négatif, on en déduit que $\overline{u_1}(z - z_1)$ est un réel négatif. Puisque, pour $k \geq 2$, on a aussi

$$\overline{u_k}(z - z_k) = \lambda_k \overline{u_1}(z - z_1),$$

$\overline{u_k}(z - z_k)$ est aussi un réel négatif.
Réciproquement, si tous les $\overline{u_k}(z - z_k)$ sont des réels (strictement) négatifs, il suffit de poser

$$\lambda_k = \frac{\overline{u_k}(z - z_k)}{\overline{u_1}(z - z_1)} \geq 0.$$

Traitons maintenant le cas où z est égal à un des z_k, disons z_1. Dans ce cas, $\overline{u_1}(z - z_1)$ est toujours un réel négatif (et même nul !). Et alors on a égalité si et seulement si, pour tout $k \geq 3$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\overline{u_k}(z - z_k) = \lambda_k \overline{u_2}(z - z_2).$$

On conclut exactement de la même façon que ci-dessus.

II.4. (Toujours difficile) On va démontrer que la condition "pour tout $k = 1, \dots, n$, $\overline{u_k}(z - z_k)$ est un réel négatif" est vérifiée si et seulement si $z = 0$. D'une part, si $z = 0$, alors

$$\overline{u_k}(z - z_k) = -|z_k| \leq 0.$$

Réciproquement, posons $\mu_k = \overline{u_k}(z - z_k) \leq 0$. Alors on a, pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$\overline{u_k}z = \mu_k + |z_k|.$$

De plus, puisque $|u_k| = 1$, on a $(\overline{u_k})^{-1} = u_k$ et donc

$$z = \theta_k z_k$$

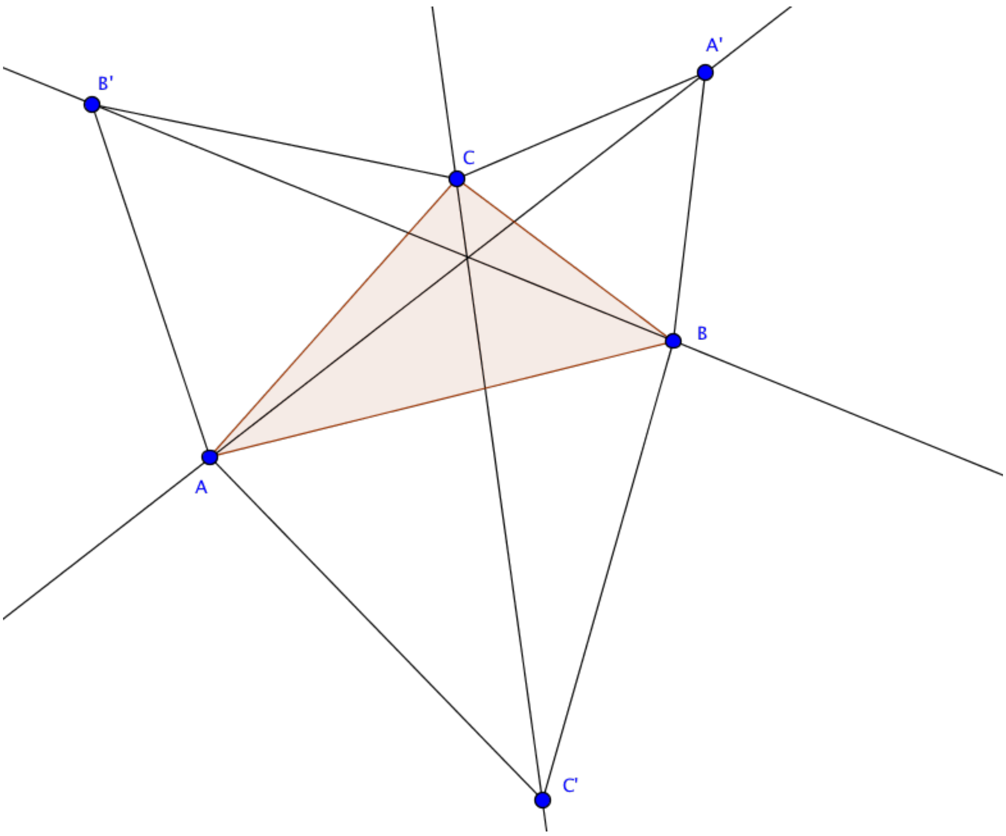
où θ_k est un réel. Ainsi, si z était différent de 0, tous les points M_k seraient sur la droite (OM), ce ce qui contredirait (iii). Donc $z = 0$.

II.5. D'après la question II.2., et en traduisant les distances par les modules, on sait que

$$\sum_{k=1}^{n} MA_k \geq \sum_{k=1}^{n} OA_k$$

avec égalité si et seulement si $M = O$. La somme $\sum_{k=1}^{n} MA_k$ atteint son minimum uniquement en O.

Partie C



I.

II. Puisque ACB' est un triangle équilatéral direct, B' est l'image de A par la rotation d'angle $\pi/3$. En utilisant l'écriture complexe des transformations, on sait que

$$b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a) \implies b' = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a).$$

De la même façon, mais en travaillant dans le triangle ABC', on a

$$b - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c'-a) \implies b = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c'-a).$$

III. Un calcul facile à partir de la question précédente donne

$$\frac{b'-b}{c-c'} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Le module de $(b'-b)/(c-c')$ est donc égal à 1, et un de ses arguments vaut $\pi/3$.

IV. La question précédente nous donne, via l'interprétation géométrique des nombres complexes, et modulo 2π,

$$(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{3}.$$

D'autre part, d'après la position de Ω (sur les segments $[BB']$ et $[CC']$), on a aussi (toujours modulo 2π),

$$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}).$$

Il suffit maintenant de triturer cette égalité pour arriver à l'égalité connue : toujours modulo 2π, on a

$$\begin{array}{rcl} (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}) & = & -(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{B'B}) \\ & = & -(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}) + \pi \\ & = & \dfrac{2\pi}{3}. \end{array}$$

Par symétrie du rôle joué par A, B et C, on obtient exactement la même mesure pour les deux autres angles.

V. Posons z_A (reps. z_B, z_C) l'affixe du vecteur $\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A}$ (resp. $\frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B}$, $\frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C}$). Ces trois nombres complexes ont pour module 1, et la question précédente, ainsi que l'écriture complexe des transformations, nous dit que $z_C = e^{2i\pi/3}z_B$, $z_A = e^{2i\pi/3}z_C$, $z_B = e^{2i\pi/3}z_A$. On en déduit que

$$z_A + z_B + z_C = \left(1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3}\right) z_A = 0.$$

Retraduisant cela en termes de vecteurs, c'est exactement la propriété que l'on voulait démontrer.

VI. Dans le plan complexe $\mathcal{P}$, on choisit un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de centre Ω. Pour appliquer les résultats de la partie B, il suffit de vérifier que les propriétés i), ii), iii) et iv) sont vérifiées.

(i) On a admis à la question II. que Ω est différent de A, B et C.

(ii) A, B et C sont deux à deux distincts pour que le triangle existe.

(iii) Les points A, B et C ne sont pas alignés, sinon ils ne formeraient pas un triangle.

(iv) Le résultat de la question V., exprimé en termes de nombres complexes, est exactement cette propriété (iv).

Ainsi, la somme $MA+MB+MC$ atteint son minimum uniquement au point Ω. Ce point s'appelle le point de Fermat ou le point de Torricelli du triangle.

Deuxième problème

Partie A

I.1. Soit $A>0$. Puisque (u_n) est non majorée, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que $u_N\geq A$. Puisque (u_n) est croissante, pour tout $n\geq N$, on a $u_n\geq u_N\geq A$. Ceci signifie exactement que (u_n) diverge vers $+\infty$.

I.2. Notons $E=\{u_n;\ n\in\mathbb{N}\}$. Alors E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure que nous notons ℓ et nous allons prouver que (u_n) converge vers ℓ. Pour cela, fixons $\varepsilon>0$. D'après la définition de la borne supérieure, il existe un élément $x\in E$ tel que $\ell-\varepsilon\leq x\leq\ell$, c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $\ell-\varepsilon\leq u_N\leq\ell$. Puisque (u_n) est croissante, pour tout $n\geq N$, on a

$$\ell-\varepsilon\leq u_N\leq u_n.$$

Mais ℓ est un majorant de E, et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n\leq\ell$. Ainsi, on a prouvé que, pour tout $n\geq N$, on a

$$\ell-\varepsilon\leq u_n\leq\ell$$

ce qui entraîne que (u_n) converge vers ℓ.

I.3. On vient de démontrer qu'une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée. Considérons maintenant (v_n) une suite décroissante et posons $u_n=-v_n$. Alors (u_n) est croissante et on a

$$\begin{aligned}(v_n)\text{ converge} &\iff (u_n)\text{ converge}\\ &\iff (u_n)\text{ est majorée}\\ &\iff (v_n)\text{ est minorée.}\end{aligned}$$

II.1. Considérons la fonction $f:x\mapsto 1/x$ représentée dans un repère orthonormé. La quantité a_n désigne l'approximation de l'intégrale de $\int_1^{n+1}f(x)dx$ obtenue en appliquant la méthode des rectangles à gauche à la fonction t sur l'intervalle $[1,n+1]$, avec un pas égal à 1. En effet, $f(k)=\frac{1}{k}$ est l'aire, en unité d'aire, du rectangle de côtés $f(k)$ et 1.

II.2. On a

$$a_{2n}-a_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Or, pour $n+1\leq k\leq 2n$, on a

$$\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2n}.$$

On réalise alors la somme de n termes qui sont tous supérieurs ou égaux à $1/2n$. On en déduit bien que $a_{2n}-a_n\geq n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. Raisonnons ensuite par l'absurde, et supposons que la suite (a_n) converge vers un certain réel ℓ. Alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers ℓ et, passant à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve

$$0 = \ell - \ell \geq \frac{1}{2},$$

une contradiction. Ainsi, la suite (a_n) est divergente.

II.3.a. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$. On a donc, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

On intègre ceci entre k et $k+1$ et on trouve le résultat demandé.

II.3.b. Sommons les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$. On trouve respectivement, notamment en utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = a_n - 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = a_{n-1} \leq a_n.$$

II.3.c. On va commencer par réécrire la double inégalité précédente en mettant a_n au milieu : on obtient

$$\ln n \leq a_n \leq 1 + \ln n.$$

La méthode est alors claire. Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$ et on peut diviser ces inégalités par $\ln n$. On en déduit que

$$1 \leq \frac{a_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Puisque $1 + \frac{1}{\ln n}$ tend vers 0, par le théorème des gendarmes, $\frac{a_n}{\ln n}$ tend vers 1. Ceci signifie exactement que a_n est équivalent à $\ln n$.

II.4. La question II.3.b. nous dit que, pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq b_n \leq 1$. La suite (b_n) est donc bornée. D'après les questions de cours, il suffit donc de démontrer que (b_n) est monotone. Mais, pour tout $n \geq 1$, on a

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq 0.$$

Ainsi, (b_n) est décroissante et minorée donc convergente.

Partie B

I.1.a. Puisque (u_n) converge vers 0, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq n_0$, on a $-\varepsilon \leq u_k \leq \varepsilon$. Maintenant, on coupe la somme définissant v_n en deux, la somme jusque n_0

et la somme au delà de n_0. On laisse la première inchangée, et on encadre la seconde en utilisant l'inégalité précédente. Plus concrètement, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$-\sum_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon$$

soit encore

$$-(n-n_0)\varepsilon \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq (n-n_0)\varepsilon.$$

Puisque $(n-n_0)/n \leq 1$, on obtient, en divisant par n,

$$-\varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq \varepsilon.$$

En rajoutant les n_0 premiers termes, on obtient bien

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leq v_n \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon.$$

I.1.b. (Question délicate, pour laquelle il est facile de faire un raisonnement faux). Un réel $\varepsilon > 0$ a été fixé, et cet $\varepsilon > 0$ fixé, nous avons défini un entier n_0 qui est désormais fixé. La suite $\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, et il existe donc un entier n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$-\varepsilon \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) \leq \varepsilon.$$

Posons $N = \max(n_0, n_1)$. Alors, en utilisant l'inégalité précédente et le résultat de I.1.a., on obtient que, pour tout $n \geq N$,

$$-2\varepsilon \leq v_n \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que (v_n) converge vers 0.

I.2. Notons $u'_n = u_n - \ell$ et (v'_n) la suite définie par

$$v'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u'_k.$$

Alors la suite (u'_n) tend vers 0, donc la suite (v'_n) tend vers 0 d'après la question précédente. Mais il est facile de constater que

$$v'_n = v_n - \ell$$

ce qui prouve que (v_n) converge vers ℓ.

II.1. et II.2. Il y a plusieurs méthodes pour répondre à ces questions. Une première méthode consiste à utiliser les théorèmes généraux sur les suites récurrentes. On pose alors, pour $x \neq -1/2$, $f(x) = \frac{x(1+x)}{1+2x}$ de sorte que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour répondre à II.1., il suffit d'observer que $x_1 = 2/3 \in]0,1[$ et de prouver que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f. Pour prouver ce point, on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $]0,1[$. En la dérivant, on prouve facilement qu'elle est strictement croissante sur cet intervalle, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 2/3$. On a donc $f(]0,1[) \subset]0,2/3[$ (en fait, on a même égalité), et donc $]0,1[$ est bien stable par f. Ceci prouve que la suite (x_n) est bien définie et que, pour tout $n \geq 1$, $x_n \in]0,1[$.

L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet également de répondre très facilement à II.2. En effet, puisque la fonction f est croissante sur l'intervalle stable $]0,1[$ et que $(x_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $]0,1[$, on sait que la suite (x_n) est monotone et que son sens de monotonie est donnée par la position de x_2 en fonction de x_1 (ATTENTION!!! Une suite récurrente associée à une fonction croissante est monotone, mais pas forcément croissante). Ici, on a $x_2 = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}}{1+\frac{4}{3}} = \frac{10}{21} \leq \frac{2}{3}$. Ainsi, la suite (x_n) est décroissante.

On peut aussi répondre à ces deux questions de façon directe. Pour la question II.1., il suffit par exemple de faire une démonstration par récurrence dont la rédaction est laissée au lecteur. Pour la question II.2., on peut remarquer que, puisque $x_n > 0$ pour $n \geq 2$, on a

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+x_n}{1+2x_n}.$$

Mais $1 + x_n \leq 1 + x_n + x_n \leq 1 + 2x_n$ puisque $x_n > 0$, et donc

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1.$$

Ceci prouve (sans récurrence!) que la suite (x_n) est décroissante.

II.3. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente, de limite $\ell \in [0,1]$. De plus, la fonction f introduite précédemment est continue sur l'intervalle $[0,1]$. La limite de la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ vérifie donc $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire

$$\ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell}.$$

$\ell = 0$ est une solution de cette équation. Si $\ell \neq 0$, on a

$$1 = \frac{1+\ell}{1+2\ell} \iff 1 + 2\ell = 1 + \ell \iff \ell = 0.$$

La seule solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ est donc $\ell = 0$, ce qui prouve que la suite (x_n) converge vers 0.

II.4. Laissée au lecteur.

II.5. Par les théorèmes d'opération sur les limites de suite, puisque x_n tend vers 0, $u_n = \frac{1}{1+x_n}$ tend vers 1. Donc par le résultat de la question I., v_n tend vers 1.

II.6. La somme définissant v_n est "télescopique" (les termes s'éliminent les uns les autres) et donc on a

$$v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - 1\right).$$

On peut même écrire que

$$nv_n - 1 = \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Mais,

$$\frac{nv_n - 1}{n} = v_n - \frac{1}{n} \to 1$$

et donc $nv_n - 1 \sim_{+\infty} n$. On en déduit (on peut passer à l'inverse pour les équivalents) que $x_{n+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ d'où on déduit assez facilement que $x_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

III.1. Si la suite (x_n) converge vers ℓ, alors (x_{n+1}) converge aussi vers ℓ et $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers 0.

III.2.a. Posons $u_n = x_{n+1} - x_n$ et (v_n) la suite de Cesàro associée à (u_n). Pour la même raison de télescopage, on a $v_n = \frac{x_{n+1}}{n} - \frac{x_1}{n}$ et on sait d'après les questions précédentes que (v_n) converge vers ℓ. Puisque la suite $\left(\frac{x_1}{n}\right)$ tend vers 0, on en déduit que la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, d'où on déduit facilement que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

III.2.b. Supposons $\ell \neq 0$, par exemple $\ell > 0$. Alors, il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$, on a $\frac{x_n}{n} \geq \frac{\ell}{2}$ soit $x_n \geq \frac{\ell n}{2}$. Dans ce cas, la suite (x_n) tend vers $+\infty$ (si $\ell < 0$, on aurait prouvé avec la même méthode que (x_n) tend vers $-\infty$). Une autre possibilité de rédaction est d'écrire que, puisque $\ell \neq 0$, on a $\frac{x_n}{n} \sim_{+\infty} \ell$ et donc que $x_n \sim_{+\infty} \ell n$ ne converge pas.

III.2.c. Pas nécessairement. Un contre-exemple est donné par la suite (a_n) de la partie A., ou plus classiquement par la suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ (c'est presque le même contre-exemple !).

Partie C

I.1. En regroupant les termes consécutifs de la somme deux par deux, on constate que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1$$

si n est impair, et que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = 0$$

si n est pair. Ceci entraine, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \right| \leq 1.$$

On en déduit que

$$|v_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Par le théorème des gendarmes, la suite (v_n) converge vers 0.

I.2. La réciproque est fausse, puisque la suite (u_n) ne converge pas alors que la suite de ces moyennes de Cesàro converge.

II.1. Si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$, les suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à 0.

II.2. Un peu de formule de trigo ne fait pas de mal ! ! ! On rappelle que

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right),$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

On en déduit facilement que

$$u_{n+2} - u_n = 2(\sin\alpha)c_{n+1} \text{ et } u_{n+2} + u_n = 2(\cos\alpha)u_{n+1}.$$

II.3.a. Si α n'est pas congru à 0 modulo π, alors $\sin\alpha$ est non nul. On en déduit que

$$c_{n+1}=\frac{u_{n+2}-u_n}{2\sin(\alpha)}$$

et donc, par passage à la limite, que (c_n) tend vers 0. De plus, si on note ℓ la limite de la suite (u_n), alors la deuxième relation nous dit que $2\ell=2(\cos\alpha)\ell$. Cette équation est équivalente à $\ell(\cos\alpha-1)=0$. Mais puisque α n'est pas congru à 0 modulo π, $\cos\alpha$ est différent de 1, et $\ell=0$.

II.3.b. Si la suite (u_n) converge, alors elle converge vers 0 de même que la suite (c_n). Mais on sait aussi que, pour tout entier n, $u_n^2+c_n^2=1$. Par passage à la limite, on obtient $0=1$, une contradiction. Ainsi, la suite (u_n) ne converge pas.

II.3.c. C'est très classique, on va reconnaitre la somme d'une série géométrique de raison différente de 1 :

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\alpha}=\sum_{k=1}^n (e^{i\alpha})^k=\frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}.$$

On a donc

$$v_n=\frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right).$$

Il reste à calculer cette partie imaginaire. La méthode est très classique : on factorise en haut et en bas par l'angle moitié (en voyant $1=e^{i0}$), puis on reconnait la formule d'un sinus :

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}} &= \frac{e^{i(n+1)\alpha/2}\left(e^{-i(n+1)\alpha/2}-e^{i(n+1)\alpha/2}\right)}{e^{i\alpha/2}\left(e^{-i\alpha/2}-e^{i\alpha/2}\right)}\\ &= e^{in\alpha/2}\frac{\sin((n+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}.\end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$v_n=\frac{\sin(n\alpha/2)\sin((n+1)\alpha/2)}{n\sin(\alpha/2)}.$$

On utilise ce résultat pour majorer très simplement (v_n) :

$$|v_n|\leq\frac{1}{n\sin(\alpha/2)}.$$

Par le théorème des gendarmes, la suite (v_n) converge donc vers 0.

III.1. La démonstration est très similaire à A.II.2. Puisque la suite (u_n) est croissante, pour tout $k\geq n+1$, on écrit que $u_k\geq u_{n+1}$ et on fait une somme comprenant n termes...

III.2. Il suffit de remarquer que

$$2v_{2n}-v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=n=1}^{2n}u_k$$

et d'appliquer l'inégalité de la question précédente !

III.3. La suite (v_n) étant convergente, elle est bornée : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq v_n \leq M$. On en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} \leq 2M - m.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge. De plus, si on note ℓ la limite de (u_n), alors par le résultat de B.I.2., ℓ est aussi la limite de la suite (v_n).

III.4. Lorsque (u_n) est une suite croissante, elle est convergente si et seulement si la suite de ses moyennes de Cesàro est convergente. De plus, dans le cas de la convergence, les deux suites ont la même limite.