AVERTISSEMENT : Ceci n'est pas une correction *in extenso* du problème de capes. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Trois problèmes de difficultés diverses au menu de cette épreuve. Le premier problème est un problème d'analyse du niveau L1, et est très détaillé. Il convient absolument d'être très précis.

Premier problème

1. On peut résoudre cette question de deux façons : soit en ayant une compréhension fine de la définition, et alors cela ne pose pas de problèmes, soit en appliquant des règles simples : le $\forall$ se transforme en $\exists$, le $\exists$ en $\forall$ et $P \implies Q$ et P et non Q. On obtient alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \eta \wedge |f(x)-f(y)| > \varepsilon.$$

Le symbole $\wedge$, qu'on utilise moins souvent, signifie "et".

2. On se laisse porter par la définition. **Soit** $\varepsilon > 0$, et **posons** $\eta = \varepsilon/k$. Alors, si $(x,y) \in I^2$ avec $|x-y| \leq \eta$, on a

$$|f(x)-f(y)| < k|x-y| \leq \varepsilon.$$

3.1. C'est du cours et une conséquence directe de l'inégalité triangulaire. On écrit en effet que

$$x = x-y+y \implies |x| \leq |x-y|+|y| \implies |x|-|y| \leq |x-y|$$

et on conclut par symétrie du rôle joué par x et y.

3.2. Démontrer, en utilisant la question précédente, que f est lipschitzienne de rapport 1.

4.1. Il faut se méfier de la rédaction de ce genre de questions (surtout à ce stade de l'épreuve). Pour la première, on écrit que, puisque x et y sont positifs, on a

$$x+y \leq x+y+2\sqrt{xy} = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

On obtient la première inégalité en utilisant que la fonction racine carrée est croissante. Pour la deuxième inégalité, on peut supposer, sans perte de généralité, que $x \geq y$, ce qui nous dispense de l'écriture avec des valeurs absolues. On a alors

$$2y \leq 2\sqrt{xy} \implies (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x+y-2\sqrt{xy} \leq x-y,$$

ce qui donne la deuxième inégalité, toujours parce que la fonction racine carrée est croissante.

4.2. Indication : il suffit d'utiliser la deuxième inégalité de la question précédente, de procéder comme en 2. en posant $\eta = \varepsilon^2$.

4.3. Supposons que g soit lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}_+$. Alors, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}_+$, on a

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq k|x-y|.$$

On applique cette inégalité avec $y = 0$ et on trouve, que pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$\sqrt{x} \leq kx.$$

Pour $x > 0$, cette inégalité devient

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq k.$$

Si on fait tendre x vers 0, le membre de gauche tend vers $+\infty$, ce qui est une contradiction.

5.1. C'est un peu plus difficile, mais tout de même extrêmement classique... On commence par calculer

$$h(x_n) - h(y_n) = n + 1 - n = 1.$$

L'écart entre $h(x_n)$ et $h(y_n)$ est constant, alors que l'écart entre x_n et y_n tend vers 0 :

$$x_n - y_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0.$$

Ce sont ces deux propriétés qui vont entraîner que h n'est pas uniformément continue. Procédons par l'absurde, et imaginons que h soit lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$. Appliquons la définition avec $\varepsilon = 1/2$. Il existerait alors $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leq \eta \implies |h(x)-h(y)| \leq 1/2$. Pour n assez grand, on aurait alors $|x_n - y_n| \leq \eta$ et donc $|h(x_n) - h(y_n)| \leq 1/2$, ce qui constitue une contradiction. Ainsi, h n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5.2. cf question 2.

6.1. C'est la définition de l'uniforme continuité avec $\varepsilon = 1$.

6.2. C'est une question délicate du point de vue de la rédaction. Pour justifier l'existence de n_0, on peut utiliser une propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ en posant

$$A = \{n \in \mathbb{N};\ x_0 \leq n\eta_1\}.$$

Alors A est une partie de $\mathbb{R}$ qui est non-vide, car tout entier $n \geq x_0/\eta_1$ convient, et donc elle admet un plus petit élément (qui ici est non-nul) et est l'entier n_0 qui convient.
Pour exprimer la valeur de n_0 en fonction de x_0 et η_1, cela sent la partie entière mais, pas de chance, l'inégalité large est dans le mauvais sens. On distingue alors deux cas :
– si $\frac{x_0}{\eta_1}$ est un entier, alors $n_0 = \frac{x_0}{\eta_1}$;
– si $\frac{x_0}{\eta_1}$ n'est pas un entier, alors on sait que

$$n_0 - 1 < \frac{x_0}{\eta_1} < n_0.$$

Ceci signifie que $n_0 = E\left(\frac{x_0}{\eta_1}\right) + 1$.

6.3. Si on enlève toutes les valeurs absolues, alors on a égalité (la somme à droite est "télescopique"). En mettant des valeurs absolues, on obtient une inégalité simplement en appliquant l'inégalité triangulaire.

6.4. Puisque

$$\frac{(k+1)x_0}{n_0} - \frac{kx_0}{n_0} = \frac{x_0}{n_0} \leq \eta_1,$$

on obtient, par choix de η_1,

$$|F(x_0) - F(0)| \leq n_0.$$

Or, la question 6.2 a prouvé que l'on a toujours

$$n_0 \leq \frac{x_0}{\eta_1} + 1$$

(si x_0/η_1 est un entier, c'est trivial, sinon, il suffit d'utiliser le fait que la partie entière d'un nombre est inférieure ou égale à ce nombre). Remplaçant dans l'inégalité précédente, on trouve

$$|F(x_0) - F(0)| \leq \frac{x_0}{\eta_1} + 1 \implies F(x_0) \leq ax_0 + b$$

avec $a = \frac{1}{\eta_1}$ et $b = 1 + F(0)$.

7. Attention, pour ces deux questions, il ne faut pas se contenter d'un raisonnement vague du type si la fonction exponentielle était uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, alors elle vérifierait $\exp(x) \leq ax + b$, et ce n'est pas le cas. Il faut prouver cette dernière assertion. Le plus facile est de diviser par x et de dire qu'on aurait alors

$$\frac{\exp x}{x} \leq a + \frac{b}{x},$$

ce qui est une contradiction puisque le membre de gauche tend vers $+\infty$ alors que le membre de droite tend vers a en $+\infty$.

8.1. On applique le résultat de la question 1. avec pour valeurs successives de η les réels $1/n$, $n \geq 1$.

8.2. Il faut faire attention. Il faut extraire des sous-suites convergentes de (x_n) et (y_n) par le théorème de Bolzano-Weierstrass, mais il faut réaliser la **même** extraction. L'idée est de faire des extractions successives. Précisément, la suite (x_n) est une suite du segment I. Elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $\ell_1 \in I$. Maintenant, la suite $(y_{\phi(n)})$ est aussi une suite de I. On peut en extraire une sous-suite $(y_{\phi(\psi(n))})$ qui converge vers $\ell_2 \in I$. La suite $(x_{\phi(\psi(n))})$ est une suite extraite de $(x_{\phi(n)})$: elle continue à converger vers ℓ_1. Ainsi, en posant $\sigma = \phi \circ \psi$, on a construit les suites extraites voulues. C'était objectivement une question difficile.

8.3. Gardons les notations ℓ_1 et ℓ_2 de la question précente et passons à la limite dans $|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leq 1/n$. On trouve $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, soit $\ell_1 = \ell_2$.

8.4. Si on passe à la limite dans $|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$, ce qu'il est légitime de faire puisque G est continue sur I, on trouve $0 = |G(\ell_1) - G(\ell_1)| \geq \varepsilon$, ce qui est une contradiction, et donc G est uniformément continue.

9. Bien sûr que non ! Prendre par exemple $J = \mathbb{R}^+$ et G la fonction exponentielle, qui est continue sur tout segment inclus dans J d'après le théorème de Heine, mais pas sur J.

Deuxième problème

Partie A.

1. C'est une question extrêmement classique qu'il faut absolument savoir résoudre. Pour la question 1.1, on utilise la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$ et on intègre l'inégalité

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k},$$

valable pour $t \in [k, k+1]$, entre k et $k+1$. Pour la question 1.2, on commence par sommer les inégalités de droite pour k allant de 1 à n. On obtient, en utilisant la relation de

Chasles,

$$\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=H_n.$$

On somme ensuite l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à $n-1$, et on trouve

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leq\int_1^n\frac{dt}{t}=\ln n.$$

Le terme de gauche de l'inégalité précédente est H_n-1. Il suffit alors de rajouter 1 pour obtenir l'inégalité désirée. Quant à la conclusion, on divise tout par $\ln n$, et il suffit de démontrer que $\ln(n+1)/\ln n$ tend vers 1. ATTENTION !!! Il faut le démontrer, pas seulement le dire.... Pour cela, on écrit tout simplement que

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln n}=1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n},$$

qui tend bien vers 1.

2. Voici une question très intéressante !!!! L'outil dont on dispose en Terminale Scientifique pour démontrer la convergence de telles suites, c'est que toute suite croissante majorée converge. La croissance de (K_n) ne pose pas de problèmes, reste à prouver qu'elle est majorée.... C'est nettement plus dur. Une idée est de procéder comme à la question 1, en utilisant que, pour tout $n\geq 1$,

$$K_n\leq 1+\int_1^n\frac{dt}{t^2}=2-\frac{1}{n}\leq 2.$$

Une autre idée (plus astucieuse), est d'écrire que, pour $k\geq 2$, on a

$$\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

On en déduit alors que

$$K_n\leq 1+\sum_{k=2}^n\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2-\frac{1}{n}$$

(la dernière somme est télescopique). Dans les deux cas, on démontre que (K_n) est majorée par 2. Remarquons d'ailleurs que dans les cours plus avancés, c'est également de cette façon (même si parfois c'est peut-être un peu caché) que l'on prouve la convergence des séries de Riemann.

3. Bof... On remplace le coefficient binomial par son expression avec des factorielles, et on remplace les factorielles par leurs équivalents. On doit avoir :

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{4^n}\times\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim_{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{4^n}\times\frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{e^{2n}}\times\frac{e^{2n}}{n^{2n}2\pi n}$$

(on a le droit de faire le produit de deux équivalent). En effectuant les simplifications nécessaires, on doit tomber sur le bon résultat...

4. Encore une question très calculatoire, qu'on peut résoudre en écrivant

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{n+1}\times(2n+2)(2n+1)}{4\sqrt{n}\times(n+1)^2}=\frac{\sqrt{n+1}\times(2n+1)}{2\sqrt{n}(n+1)}.$$

Ceci entraîne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}-1=\frac{\sqrt{n+1}(2n+1)-2\sqrt{n}(n+1)}{2\sqrt{n}(n+1)}.$$

On met alors au numérateur $\sqrt{n+1}$ en facteur (on récupère de suite le bon dénominateur), et je vous laisse finir le calcul.

5. (a_n) est une suite positive vérifiant $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$. Elle est donc croissante. Maintenant, si une suite est croissante et convergente, elle est toujours plus petite que sa limite (je ne crois pas qu'il faille le démontrer dans le cadre de ce problème).

6.1. On écrit la différence, on développe $(a+b)^2$, et on reconnait quand même un carré, $(a-b)^2$.

6.2. Si on utilise la **quantité conjuguée**, on trouve

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Maintenant, d'après la question précédente, on a

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2\geq 4\sqrt{n(n+1)}\geq 0.$$

Il suffit de passer à l'inverse, ce qui est possible car tout est positif.

7.1. On utilise les 3 questions précédentes !

$$0\leq a_{n+1}-a_n=a_n\times\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\leq\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{4\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\times\frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.$$

7.2. Cela va encore se télescoper... On écrit en effet que

$$0\leq a_p-a_k=\sum_{n=k}^{p-1}(a_{n+1}-a_n)\leq\sum_{n=k}^{p-1}\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\times\frac{1}{n(n+1)}.$$

Or,

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

La somme apparaissant à droite est télescopique, et après simplifications (comme à la question 2.), on trouve le résultat voulu.

7.3. On fait tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente.

Partie B.

Voici un petit peu de probabilité. Il vaut mieux ne pas y être réfractaire, d'autant qu'ici des points sont facilement gagnables.

1. La variable aléatoire U_n compte le nombre de fois où O_k est égale à 1, pour k compris entre 1 et $2n$. Puisque O_k ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, on en déduit que $U_n=\sum_{k=1}^{2n}O_k$ (cette question est juste une affaire de compréhension de l'énoncé...)

2.1. Après un nombre impair de sauts, la particule ne peut être que sur un point d'abscisse impaire. Et donc $P(O_{2k+1}) = 0$.

2.2. Dans cette question, il n'est pas si facile de faire un raisonnement suffisamment précis. Une bonne idée est d'invoquer les schémas de Bernoulli. On a en effet la répétition de $2k$ épreuves de Bernoulli indépendantes, avec probabilité $1/2$ qu'on aille vers la droite et probabilité $1/2$ qu'on aille vers la gauche. L'événement "$O_{2k} = 0$" se produit si et seulement si on a eu k déplacements vers la gauche (et donc aussi k vers la droite). Si le déplacement vers la gauche est un succès, et le déplacement vers la droite un échec, on cherche la probabilité que dans un schéma de Bernouilli $\mathcal{B}(2k, 1/2)$, il y ait exactement k succès. Par la formule donnant la loi binomiale, on trouve

$$P(O_{2k} = 1) = \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^k} \times \binom{2k}{k}.$$

3. La première idée qui vient en tête est la suivante : par linéarité de l'espérance, on a

$$E(U_n) = \sum_{k=1}^{2n} E(O_k) = \sum_{p=1}^{n} E(O_{2p}) = \sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{\sqrt{p}}.$$

On peut ensuite démontrer la formule demandée pour $E(U_n)$ par récurrence sur n à partir de l'égalité précédente. C'est un petit peu technique, mais l'admissibilité ne se joue pas là !

4. On peut remarquer que

$$E(U_n) = \frac{2n+1}{\sqrt{n}} a_n - 1.$$

On en déduit que

$$\frac{E(U_n)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} = \frac{2n+1}{2n} \times (a_n\sqrt{\pi}) - \frac{\sqrt{\pi}}{2n}.$$

Le terme de droite tend vers 1, et donc

$$E(U_n) \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Partie C.

1. De la même façon, $U_n = \sum_{k=1}^{2n} O_k$.

2. Après un nombre impair de sauts, la particule ne peut être que sur un point dont l'ordonnée et l'abscisse sont impaires. Et donc $P(O_{2k+1}) = 0$. Notons X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si l'abscisse est égale à 0 à l'instant $t = k$, et 0 sinon, et Y_k la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ordonnée est égale à 0 à l'instant $t = k$, et 0 sinon. Les variables aléatoires X_k et Y_k sont indépendantes, et on a $(O_{2k} = 1) = (X_{2k} = 1) \cap (Y_{2k} = 1)$. On a donc, par indépendance,

$$P(O_{2k} = 1) = P(X_{2k} = 1) \times P(Y_{2k} = 1).$$

Or, X_{2k} et Y_{2k} modélisent une marche aléatoire sur une droite comme à la partie B. On a donc

$$P(X_{2k} = 1) = P(Y_{2k} = 1) = \frac{a_k}{\sqrt{k}}$$

d'où l'on déduit immédiatement le résultat demandé.

3.,4.,5. Ces questions se traitent comme à la partie précédente, ou plus ou moins immédiatement en utilisant des résultats de la partie A. Elles ne sont pas forcément très intéressantes à corriger.... L'équivalent de $E(U_n)$ est $\frac{\log n}{\pi}$ ce qui n'est pas illogique. En dimension 2, on aura moins tendance à repasser par l'origine.

Troisième problème

1. On connait les valeurs de ces deux sommes (ce sont des sommes de suite arithmétique). Les entiers m et n sont solution si et seulement si

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{(n-m+1)(n+m)}{2} \iff m^2+m = n^2-m^2+n+m$$

ce qui est encore équivalent à

$$2m^2 = n^2+n.$$

Posons $x = 2n+1$ et $y = 2m$. Alors on a également

$$x^2-2y^2 = (2n+1)^2-8m^2 = 4n^2+4n+1-8m^2$$

et donc

$$x^2-2y^2 = 1 \iff 8m^2 = 4n^2+4n \iff 2m^2 = n^2+n.$$

2. L'idée de l'algorithme est assez simple. On va énumérer tous les y entre 1 et 100 et calculer $\sqrt{1+2y^2}$. Si c'est un entier, on a trouvé une solution et on l'affiche. L'algorithme suivant a été testé avec Algobox :

```
VARIABLES
    y EST_DU_TYPE NOMBRE
    x EST_DU_TYPE NOMBRE
  DEBUT_ALGORITHME
    POUR y ALLANT_DE 1 A 100
      DEBUT_POUR
      x PREND_LA_VALEUR sqrt(1+2*y*y)
      SI ((x==floor(x))) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER x
        AFFICHER y
        FIN_SI
      FIN_POUR
  FIN_ALGORITHME
```

Il trouve trois couples d'entiers : $(3,2)$, $(17,12)$ et $(99,70)$.

3. En faisant tourner l'algorithme à la main, on trouve que la plus petit solution de E est $(3,2)$ (il suffit en fait de vérifier que c'est une solution, et qu'il n'y a pas de solution avec $y=1$).

4.1. Développons le terme de gauche avec la formule du binôme de Newton. On trouve :

$$(3+2\sqrt{2})^n=\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}3^{n-k}2^k(\sqrt{2})^k.$$

On sépare dans la somme les termes où k est pair et ceux où k est impair, c'est-à-dire que l'on écrit

$$(3+2\sqrt{2})^n=\sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^n \binom{n}{k}3^{n-k}2^k(\sqrt{2})^k+\sum_{k=0,\ k \text{ impair}}^n \binom{n}{k}3^{n-k}2^k(\sqrt{2})^k.$$

Maintenant, si $k=2l$ est pair, alors $(\sqrt{2})^k=2^l$ et donc

$$\sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^n \binom{n}{k}3^{n-k}2^k(\sqrt{2})^k$$

est un entier. D'autre part, si k est un entier impair, $k=2l+1$, alors$(\sqrt{2})^k=2^l\sqrt{2}$ et donc

$$\sum_{k=0,\ k \text{ impair}}^n \binom{n}{k}3^{n-k}2^k(\sqrt{2})^k=a\sqrt{2}$$

où a est un entier. Faisant la somme, on trouve bien le résultat demandé.

4.2. On écrit que

$$(3+2\sqrt{2})^{n+1}=x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}$$

et que

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^{n+1}&=(3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})\\&=(x_n+y_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\\&=(3x_n+4y_n)+(2x_n+3y_n)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Par identification, on a $x_{n+1}=3x_n+4y_n$ et $y_{n+1}=2x_n+3y_n$. Remarquons que, pour définir les suites (x_n) et (y_n), l'énoncé a utilisé implicitement qu'un réel u ne peut pas admettre deux écritures différentes de la forme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b des entiers. Ceci est une conséquence de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On a aussi utiliser ceci pour notre identification.

4.3. On commence par remarquer, ou bien en utilisant la formule du binôme, ou bien en utilisant la relation de récurrence, que les suites (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers strictement positifs. De plus,

$$x_{n+1}-x_n=2x_n+4y_n>0$$

et donc la suite (x_n) est strictement croissante. Or, une suite croissante est ou bien majorée et convergente, ou bien divergente vers $+\infty$. Comme (x_n) est une suite d'entiers, si elle était convergente, elle serait stationnaire ce qui est impossible car (x_n) est strictement croissante. Donc (x_n) tend vers $+\infty$. Le raisonnement est exactement le même pour (y_n).

5. Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : $\mathcal{P}(n)$ = "Le couple (x_n, y_n) est solution de (E)".
On a $x_1 = 3$ et $y_1 = 2$ qui est solution, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit maintenant $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. On a, utilisant la formule de récurrence,
$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 \quad = \quad 9x_n^2 + 16y_n^2 + 24x_ny_n - 8x_n^2 - 18y_n^2 + 24x_ny_n = x_n^2 - 2y_n^2 = 1.$$
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée. Donc, par le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, (x_n, y_n) est une solution de (E).
6. On a $Y > y_1$ et puisque la suite (y_n) est croissante tendant vers $+\infty$, on peut définir $N = \max\{n \geq 1;\ y_n \leq Y\}$. Alors par définition de N, on a $Y_N \leq Y < Y_{N+1}$ et la première inégalité est même stricte, puisque Y n'est pas un élément de la suite (y_n).
7. On a $y_2 = 12$ et notre algorithme nous a montré que la deuxième solution de (E), pour l'ordre fixé, est $(17, 12)$. Donc $y_2 \leq Y$ et $N \geq 2$.
8. Posons $f(y) = \sqrt{1 + 2y^2}$. Alors on a $x_N = f(y_N)$, $X = f(Y)$ et $x_{N+1} = f(y_{N+1})$. Comme la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, de l'inégalité $y_N < Y < y_{N+1}$ on déduit l'inégalité $x_N < X < x_{N+1}$. Il suffit alors d'ajouter les inégalités...
9. On divise l'inégalité obtenue à la question précédente par $3 + 2\sqrt{2}$, ce qui est possible car il s'agit d'un réel strictement positif. On remarque que d'une part
$$\frac{x_N + y_N\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2}$$
et d'autre part, en utilisant la quantité conjuguée,
$$\frac{X + Y\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = (3X - 4Y) + (3Y - 2X)\sqrt{2}.$$
Ceci donne l'inégalité demandée.

10.1.2.3. Pour vérifier chacune des 3 inégalités, on remplace X par sa valeur en fonction de Y, $\sqrt{1 + 2Y^2}$. On obtient une fonction de Y dont on doit démontrer qu'elle est strictement positive sur l'intervalle $[13, +\infty[$ puisqu'on sait que $Y > y_2 = 12$. Par exemple, on doit prouver que si $Y > 13$,
$$3\sqrt{1 + 2Y^2} - 4Y > 0.$$
C'est une simple étude de fonction !

10.4. Il suffit, en développant, de vérifier que $(3X - 4Y)^2 - 2(3Y - 2X)^2 = X^2 - 2Y^2 = 1$.

11. La question précédente nous dit que, partant d'une solution (X, Y) la plus petite possible différente des y_n, on a construit une autre solution $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ qui lui est strictement inférieure, et qui est toujours différente des y_n (pourquoi ?). C'est absurde ! Cette méthode de raisonnement s'appelle la descente infinie et et très utile pour la résolution de certaines équations diophantiennes.