Avertissement : Ceci n'est pas une correction *in extenso* du problème de capes. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter.

Ce problème est le premier après la réforme du capes intervenue à la session 2011. On peut dire qu'il innove : plusieurs exercices au lieu d'un seul problème, un premier exercice qui ne fait appel qu'à des connaissances de collège, un second qui démontre des propriétés enseignées au lycée, des thèmes différents (mélange géométrie/analyse).

Le premier exercice est sans doute plus difficile qu'il n'y parait. Le second permettait de gagner des points si on maitrise bien les bases de l'analyse niveau Terminale ou L1. Il est clair que la qualité de la rédaction a joué un rôle très important dans la notation de cet exercice. L'exercice 3 est plus classique. Comme le signale le rapport du jury, seule la première partie de cet exercice a été traitée significativement par les candidats.

Deuxième exercice

I.1 Cette question est une question typique de l'oral. On procède comme le sujet l'indique, en supposant qu'il n'est pas vrai que pour tout entier n, $w_n \geq l$. Ceci signifie qu'il existe un entier p tel que $w_p < l$ (remarquez bien que la négation de "pour tout" est "il existe"...). Mais alors, pour tout $n \geq p$, puisque (w_n) est décroissante, on a $w_n \leq w_p$. Si on utillise le dernier rappel de l'énoncé (avec la suite constante $(w_p)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} w_n \leq \lim_{n\to+\infty} w_p \implies \ell \leq w_p < l.$$

Ceci est absurde, et donc pour tout entier n, on a $w_n \geq l$.

On peut prouver autrement ce résultat, sans faire appel au rappel de l'énoncé, mais en utilisant la définition de la limite d'une suite. Les points délicats de cette question étaient : ne pas se tromper dans la négation de la proposition, et faire attention au passage d'inégalités strictes à des inégalités larges lorsqu'on prend la limite. Par exemple, il ne fallait pas écrire

$$\forall n \geq p,\ w_n < \ell \implies \lim_n w_n < \ell.$$

I.2.1. La suite (v_n) est décroissante, la suite $(-u_n)$ est décroissante car la suite (u_n) est croissante, et la somme de deux suites décroissantes est décroissante. Donc...

I.2.2. Il suffit de mettre ensemble le résultat des deux premières questions.

I.2.3. (u_n) est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leq v_n \leq v_0,$$

puisque la suite (v_n) est décroisante. Ainsi, (u_n) est une suite croissante et majorée, elle converge. Le raisonnement est similaire pour (v_n). Il est important de noter qu'on ne peut pas se contenter de $u_n \leq v_n$ pour conclure que (u_n) est majorée...

I.2.4. Il suffit d'utiliser le fait que $(v_n - u_n)$ tend vers 0 et d'appliquer le dernier rappel de l'énoncé (début de la ligne).

I.3. Là, on n'a plus le choix : il faut mettre les mains dans les ε. On commence par écrire que f est continue en ℓ :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ |\ell - x| \leq \alpha \implies |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon.$$

On écrit ensuite que (u_n) converge vers ℓ, mais on l'applique pour "$\varepsilon = \alpha$" uniquement. On écrit donc que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \alpha.$$

En mettant tout ensemble, on a bien prouvé que :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |f(u_n) - f(l)| < \varepsilon.$$

C'est bien que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

II.1.1 C'est le premier raisonnement par récurrence du problème, et il faut absolument très bien le rédiger. Celui-ci n'est d'ailleurs pas si facile, puisqu'il faut traiter simultanément les deux suites (a_n) et (b_n). On considère donc, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}a_n \text{ et } b_n \text{ sont bien définis et } a_n, b_n \in [a,b]\text{"}.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, a_{n+1}, b_{n+1} sont bien définis (car il y a un sens à parler de $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$.) De plus,

- Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$, alors $b_{n+1} = b_n \in [a,b]$, et

$$a = \frac{a+a}{2} \leq a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b.$$

- Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda$, alors on peut faire le même raisonnement en échangeant le rôle joué par a_{n+1} et b_{n+1}.

Dans tous les cas, on a prouvé que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

II.1.2. Pour cette question, en revanche, une récurrence n'est pas nécessaire ! Il suffit de discuter suivant les deux cas proposés par l'énoncé.

II.1.3. Cette question est un peu plus difficile. On doit prouver trois propriétés pour obtenir que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Mais pour démontrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante, on a besoin à un moment d'utiliser que $a_n \leq b_n$ pour tout entier n. C'est cette propriété qu'il faut d'abord démontrer. On peut le faire directement par récurrence, ou en remarquant qu'une récurrence et que le résultat de la question précédente donnent

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

On en déduit alors, sans récurrence mais en discutant les deux cas, que (a_n) est croissante, que (b_n) est décroissante. Que la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0 provient de l'égalité précédente.

II.1.4. Soit l la limite commute des suites (a_n) et (b_n). On veut démontrer que $f(l) = \lambda$. Pour cela, on doit remarquer (par récurrence...) que, pour tout entier n, $f(a_n) \leq \lambda$ et $f(b_n) \geq \lambda$. En passant à la limite (et en utilisant les résultats de I.1 et I.3.), on en déduit que $f(l) \geq \lambda$ et $f(l) \leq \lambda$, donc que $f(l) = \lambda$. Ceci prouve que f possède la propriété $\mathcal{P}$.

II.2. Indication : considéter la fonction continue g définie sur $[a,b]$ par $g(x)=f(x)-x$. Quel est le signe de $g(a)$? de $g(b)$?

II.3. C'est nettement plus compliqué. On sent bien qu'il faut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f, et en réalité, ce qu'on veut prouver, c'est que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

est une valeur prise par f sur l'intervalle $[a,b]$. Cela pose plusieurs problèmes. Le premier est la définition même de la quantité ci-dessus (le dénominateur ne doit pas être nul). Le second est qu'on a aucune chance si on essaie d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires directement entre a et b (il se pourrait par exemple que $f(a)=f(b)$).
On commence par traiter le cas où g est identiquement nulle. Dans ce cas, toutes les intégrales sont nulles, et on peut prendre $c=a$ (ou n'importe quelle valeur de $[a,b]$). Sinon, si g n'est pas identiquement nulle, alors, puisque g est de plus continue, $\int_a^b g(x)dx>0$ (ce théorème est un grand classique du capes....). De plus, f est continue sur le segment $[a,b]$. Comme il est précisé dans les rappels (si on cite ce théorème dans les rappels, c'est bien qu'il faut l'utiliser !), f est bornée et atteint ses bornes sur l'intervalle $[a,b]$. Soit m sa borne inférieure, et $a_1\in[a,b]$ tel que $m=f(a_1)$, et soit M sa borne supérieure, avec $b_1\in[a,b]$ tel que $M=f(b_2)$. Alors, on a, puisque g est positive, pour tout $x\in[a,b]$,

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x),$$

soit en intégrant,

$$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Puisqu'on peut diviser, on obtient finalement

$$f(a_1)\leq\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq f(b_2).$$

Et maintenant, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre a_1 et b_1.

II.4.1. C'est astucieux, et je doute que de nombreux candidats aient réussi cette question. Avec les indications de l'énoncé, on arrive facilement à écrire

$$0=f(1)-f(0)=\sum_{k=0}^{n-1}f_n\left(\frac{k}{n}\right).$$

Et alors ? Le point clé est de remarquer que tous les $f_n(k/n)$ ne peuvent pas être tous strictement positifs ou tous strictement négatifs. Mais alors, on peut trouver un entier k dans $\{0,\dots,n-2\}$ tel que $f_n(k/n)\leq 0$ et $f_n((k+1)/n)\geq 0$, ou bien $f_n(k/n)\geq 0$ et $f_n((k+1)/n)\leq 0$ (seriez-vous capable de démontrer cela formellement ?). Il suffit alors d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f_n entre les points k/n et $(k+1)/n$.

II.4.2. C'est nettement plus facile, car on nous donne la fonction. On remarque d'abord que $f(0)=f(1)=1$. Par ailleurs, s'il existait $x\in[0,1-\alpha]$ avec $f(x)=f(x+\alpha)$, on obtiendrait après simplifications :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)=1.$$

Ceci n'est pas possible si $1/\alpha$ n'est pas un entier.

III.1. C'est du classique ! Pour prouver que f n'est pas continue en 0, il suffit de trouver une suite (u_n) qui converge vers 0, mais telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(0) = 0$. Ici, $u_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ convient, puisque $f(u_n) = 1$ pour tout entier n. Question bonus : si on n'avait pas posé $f(0) = 0$, sauriez-vous prouver que f ne peut pas se prolonger par continuité en 0 ?
Maintenant, il faut prouver que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Soient $a < b$ deux réels. Si $0 \notin [a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$, et on peut directement appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f. Sinon, on a donc $0 \in [a,b]$, et on peut prouver que tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est une valeur prise par f sur $[a,b]$. On va même prouver mieux. En effet, il est clair que $\lambda \in [-1,1]$ et on va prouver que toute valeur entre -1 et 1 est prise par f dans l'intervalle $[a,b]$ (tracez la courbe de la fonction f pour vous en convaincre !). Soit donc $\mu \in [-1,1]$. Sans perte de généralité, on peut supposer $0 \neq b$. Soit $\theta \in [0,2\pi[$ tel que $\sin(\theta) = \mu$. Alors, posons

$$v_n = \frac{1}{2n\pi+\theta}.$$

La suite (v_n) converge vers 0, par valeurs supérieures, et donc pour n assez grand, on a $v_n \in [0,b] \subset [a,b]$. De plus, $f(v_n) = \mu$ pour chaque entier n. Ainsi, μ est une valeur prise par f sur l'intervalle $[a,b]$.

III.2.1. g est une fonction dérivable, donc continue sur l'intervalle $[a,b]$. Il s'agit alors d'utiliser un théorème des rappels.

III.2.2. Encore une question où le taux de réussite a dû avoisiner 0... Je vais prouver que $c \neq a$, l'autre cas étant complètement similaire. On raisonne par l'absurde, et on suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $g(x) \geq g(a)$. Cela se retraduit en, pour tout $x \in]a,b]$, par

$$f(x) - \lambda x \geq f(a) - \lambda a \iff f(x) - f(a) \geq \lambda(x-a) \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \lambda.$$

On fait alors tendre x vers a et on obtient $f'(a) \geq \lambda$, ce qui contredit le choix de λ.

III.2.3. Le raisonnement est en fait exactement identique à la question précédente, et il doit être répété deux fois. Soit $x \in]c,b]$. Alors

$$g(x) \geq g(c) \iff \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq \lambda.$$

On fait tendre x vers c et on obtient $f'(c) \geq \lambda$. En considérant ensuite les $x \in [a,c[$, on obtient avec le même raisonnement $f'(c) \leq \lambda$. Et donc...

III.2.4. Question de compréhension (attention de ne pas tomber dans le piège et d'utiliser la fonction de la question III.1.). La fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$. Si elle admettait une primitive F, la fonction partie entière serait donc la dérivée de F, et à ce titre elle vérifierait le théorème des valeurs intermédiaires. Mais ce n'est pas le cas.

III.3. Question trop difficile pour un écrit du capes... Je ne la traite pas !

Troisième exercice

I.1. h_n est de classe C^∞.

I.2. C'est du calcul ! $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$.

I.3. Voici une solution sous xcas :

```
Laguerre(n):={
local j,h;
h:=x^n*exp(-x);
for (j:=1;j<=n;j++) { h:=diff(h); }
return simplify(exp(x)*h/factorial(n));
};
```

I.4. La clé est d'appliquer la formule de Leibniz, utilisée plusieurs fois dans ce problème, et que je vous invite à revoir. pour calculer la dérivée n-ième du produit $x^n e^{-x}$. On en déduit que $h_n^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme $P(x)e^{-x}$ où P est un polynôme de degré n, et on a presque gagné...

I.5.1. Pour $h_n^{(n)}$ en fonction de L_n, c'est trivial. Pour l'autre, il suffit de dériver, soit

$$h_n^{(n+1)}(x) = n!e^{-x}(L_n' - L_n).$$

I.5.2. Est-ce que l'auteur attend $h_{n+1} = xh_n$?

I.5.3. Ah, oui ! On dérive $(n+1)$-fois l'expression précédente en utilisant la formule de Leibniz, ce qui donne

$$L_{n+1} = \frac{e^x}{(n+1)!}\left((n+1)h_n^{(n)} + xh_n^{(n+1)}\right).$$

On triture un tout petit peu cette relation en utilisant les relations obtenues en I.5.1. pour obtenir le bon résultat.

I.6. Que ces questions sont ennuyeuses (car purement algébriques...) ! On utilise l'indication donnée par l'énoncé, et on remarque que d'une part :

$$\left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)' = \left((n+1)!e^{-x}L_{n+1}\right)'.$$

D'autre part,

$$\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)} = \left((n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1}e^{-x}\right)' = (n+1)\left(n!e^{-x}L_n\right)' - (n+1)!e^{-x}L_{n+1}.$$

Il suffit de tout remettre ensemble, le courageux lecteur le fera...

I.7. Ce n'est pas beaucoup plus passionnant. Pour la deuxième relation, on écrit successivement que :

$$(n+1)L_{n+1} = XL_n' + (n+1-X)L_n$$

puis que

$$XL_n' = XL_{n-1}' - XL_{n-1}$$

et enfin que

$$XL_{n-1}' = nL_n - (n-X)L_n.$$

Si on remet tout ensemble, on obtient la relation demandée. Pour la première, on part de

$$XL_n' = (n+1)L_{n+1} - (n+1-X)L_n$$

qu'on dérive pour obtenir

$$XL_n'' + L_n' = (n+1)L_{n+1}' - (n+1-X)L_n' + L_n.$$

On injecte alors la relation obtenue en I.6., on réordonne et on obtient le résultat voulu.

II.1. Ah, la formule de Leibniz, on venait justement d'en parler... Il suffit de l'appliquer bien comme il faut, et on doit trouver que

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(k!)^2(n-k)!}x^k$$

(sauf erreur de ma part, mais cela fonctionne pour L_2).

II.2. Ceci aussi est un exemple très classique des cours sur les fonctions d'une variable réelle. f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 car

$$f(x)=x^{n+1}\varepsilon(x),$$

où la fonction ε, définie par $\varepsilon(x)=x\sin(1/x^{n+1})$ si $x\neq 0$, et $\varepsilon(0)=0$, tend vers 0 en 0. D'autre part, par calcul du taux d'accroissement, on voit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$. Sur $\mathbb{R}^*$, la dérivabilité de f ne pose pas de problèmes, pas plus que le calcul de la dérivée, et on trouve

$$f'(x)=(n+2)x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)-(n+1)\cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right).$$

Par un raisonnement complètement similaire à celui de la question III.1 du problème 2, on vérifie que f' n'est pas continue en 0. Mais on rappelle les faits suivants :
- g admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si et seulement si g est continu en 0.
- g admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 si et seulement si g est dérivable en 0.
- Pour $n\geq 2$, on n'a plus d'équivalence entre admettre un développement limité à l'ordre n en 0 et être n-fois dérivable en 0. On a en revanche toujours une implication : si f est $(n-1)$-fois dérivable dans un voisinage de 0, et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Ces rappels devraient vous permettre de donner une réponse aux questions II.2.1. et II.2.2.

II.3. Je ne fais pas en détails ces questions. D'ailleurs, le rapport du jury mentionne bien que pratiquement aucun candidat n'a traité les parties II et III de ce troisième problème. Voici simplement quelques pistes :
- Pour 3.1., multiplier le DL à l'ordre N de e^{-x} par x^n ;
- Pour 3.2., on est dans une situation où on est en droit de dériver un développement limité (car h_n est C^∞).
- Pour 3.3., il faut faire le produit de deux développements limités à l'ordre N.
- Utilise l'unicité des développements limités, et le fait qu'on a déjà un développement limité de L_n puisque c'est un polynôme (la partie principale de son dl à l'ordre n est égale à lui-même...) Remarquons que cette question permet de vérifier que la formule trouvée à la question II.1. est correcte. L'honneur est sauf !

III.1. Même si partie III est en toute fin d'épreuve, il est intéressant de la corriger car elle est extrêmement classique. Pour prouver que φ est bien définie, on commence par remarquer que la fonction $x\mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur $]0,+\infty[$. D'autre part, par comparaison des fonctions exponentielle et polynômes, on sait que $\lim_{x\to+\infty}x^2P(x)Q(x)e^{-x}=0$. Or, la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par comparaison, $x\mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc $\varphi(P,Q)$ est bien défini, pour tout couple de polynômes P,Q.

III.2. Démontrer que φ est une forme bilinéaire symétrique ne pose aucun problème. La vraie difficulté de cette question est de démontrer que si $\varphi(P,P)=0$, alors $P=0$. On va pour cela utiliser le théorème suivant : soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, positive. On suppose que $\int_a^b f(t)dt=0$. Alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$. Dans notre contexte, soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P)=0$. On ne peut pas appliquer le théorème directement, car on a affaire à une intégrale impropre. Cela dit, $\varphi(P,P)=0$ entraîne que

$$\int_0^1 P^2(t)e^{-t}dt=0,$$

puisque $\int_1^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt\geq 0$. On peut appliquer le théorème précédent à $f(t)=P^2(t)e^{-t}$. Puisque la fonction exponentielle ne s'annule jamais, on en déduit que $P(t)=0$ pour tout $t\in[0,1]$. Un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul...

III.3. On a vu que $L_0=1$. Il s'agit de prouver par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\varphi(L_0,X^n)=n!$. C'est vrai si $n=0$. Si la propriété est vraie au rang $n\in\mathbb{N}$, alors

$$\varphi(L_0,X^{n+1})=\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx=\Big[-x^{n+1}e^{-x}\Big]_0^{+\infty}+(n+1)\varphi(L_0,X^n),$$

l'intégration par parties étant justifiée par la convergence des deux intégrales, et par l'existence de la limite en $+\infty$ de $x^{n+1}e^{-x}$ (c'est zéro). De

$$\Big[-x^{n+1}e^{-x}\Big]_0^{+\infty}=0,$$

on tire

$$\varphi(L_0,X^{n+1})=(n+1)\varphi(L_0,X^n)=(n+1)!$$

La propriété est vraie au rang $n+1$. Par application de l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

III.4.1. Il s'agit (encore une fois !) de la formule de Leibniz à appliquer correctement ! En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$h_n^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}(e^{-x})^{(j)}(x^n)^{(k-j)}.$$

Or,

$$(e^{-x})^{(j)}=(-1)^je^{-x},$$

et

$$(x^n)^{(k-j)}=n(n-1)\dots(n-k+j+1)x^{n-k+j}=x^{n-k}R_{n,j,k}(x)$$

où $R_{n,j,k}$ est un polynôme (et même un monôme...). En sommant tout cela, on trouve

$$h_n^{(k)}(x)=e^{-x}x^{n-k}\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}(-1)^jR_{n,j,k}(x)$$

ce qui est le résultat voulu en posant

$$Q_k(x)=\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}(-1)^jR_{n,j,k}(x).$$

III.4.2. On fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$, et on prouve par récurrence finie sur $p \in \{0, \dots, n\}$ la propriété suivante :

$$H_p : \varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx.$$

H_0 est vraie : il suffit de remplacer L_n par sa définition. Soit $p \leq n-1$ tel que H_p est vraie, et prouvons H_{p+1}. Il s'agit juste de faire une intégration par parties ; le fait que tout se passe bien avec la borne $+\infty$ est une conséquence du résultat de la question précédente. Précisément, soit $a > 0$. Alors, par intégration par parties :

$$\int_0^a h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx = P^{(p)}(a) h^{(n-(p+1))}(a) - P^{(p)}(0) h^{(n-(p+1))}(0) - \int_0^a h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x) dx.$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, puisque $n-(p+1) < n$, $h^{(n-(p+1))}(0) = 0$. D'autre part, toujours d'après la question précédente,

$$P^{(p)}(x) h^{(n-(p+1))}(x) = e^{-x} R(x),$$

où R est un polynôme. Ainsi,

$$\lim_{a \to +\infty} P^{(p)}(a) h^{(n-(p+1))}(a) = 0.$$

Le même argument démontre que la fonction $x \mapsto h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty]$. On peut donc faire tendre a vers $+\infty$, et on trouve que

$$\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx = -\int_0^{+\infty} h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x) dx,$$

ce qui, à son tour, entraîne que H_{p+1} est vraie.

III.5. On va d'abord prouver que c'est une famille orthogonale. Le résultat de la question précédente, appliqué avec $p = n$, prouve que L_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur strict à n. En particulier, puisque L_m est de degré m, $L_n \perp L_m$ si $m < n$. On a bien une famille orthogonale.

De plus, on a, toujours d'après la même formule,

$$\varphi(L_n, L_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x) L_n^{(n)}(x) dx.$$

On a déjà vu que L_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n/n!$. Il vient $L_n^{(n)}(x) = (-1)^n$, et donc

$$\varphi(L_n, L_n) = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x) dx = \frac{1}{n!} \varphi(L_0, X^n) = 1.$$

La famille (L_n) est bien une famille orthonormée.